

Pelabelan Rata-Rata Geometris Graf Ular mC_n

Junjungan Dwipa Sakti Simanjuntak¹⁾, Fransiskus Fran²⁾, dan Yudhi³⁾

^{1,2,3}Universitas Tanjungpura Pontianak, Indonesia

^{*)} email: fransiskusfran@math.untan.ac.id

Abstrak

Pelabelan graf merupakan suatu pemetaan yang memetakan elemen-elemen graf yaitu sisi atau titik dengan bilangan bulat positif, yang dikenal sebagai label. Salah satu variasi dari pelabelan graf adalah pelabelan rata-rata geometris, yang merupakan bentuk khusus dari pelabelan rata-rata aritmetika. Pada pelabelan rata-rata geometris graf $G = (V(G), E(G))$ yang memiliki p titik dan q sisi, merupakan fungsi injektif h dengan domain $V(G)$ dan kodomain $\{1, 2, 3, \dots, q + 1\}$ yang menginduksi fungsi bijektif h^* dengan domain $E(G)$ dan kodomain $\{1, 2, 3, \dots, q\}$ sehingga untuk sisi $e = uv \in E(G)$ berlaku $h^*(uv) = \lfloor \sqrt{h(u)h(v)} \rfloor$. Graf rata-rata geometris adalah graf yang memenuhi pelabelan rata-rata geometris. Pada artikel ini, dibahas suatu pelabelan rata-rata geometris untuk graf ular mC_n untuk $n = 5, 6, 7, 8$ dan $m \geq 1$. Proses konstruksi pelabelan ini dilakukan dengan melabeli titik-titik pada graf tersebut sehingga menghasilkan label sisi-sisi sesuai dengan definisi pelabelan rata-rata geometris dan menghasilkan suatu pola label untuk masing-masing titiknya. Berdasarkan hasil konstruksi pelabelan rata-rata geometris untuk graf ular mC_n dengan $n = 5, 6, 7, 8$ diperoleh bahwa, graf ular mC_n dengan $n = 5, 6, 7, 8$ untuk $m \geq 1$ adalah graf rata-rata geometris.

Kata kunci : Pelabelan rata-rata geometris, graf ular, label, fungsi injektif, fungsi bijektif

MSC2020: 05C78

Abstract

Labeling on a graph is a mapping that assigns each element of the graph, namely a set of edges or a set of vertices to positive integer numbers, called labels. One type of graph labeling is geometric mean labeling, a variation of arithmetic mean labeling. The geometric mean labeling of a graph $G = (V(G), E(G))$ with p vertices and q edges is the injective function h from $V(G)$ to $\{1, 2, 3, \dots, q + 1\}$ which induces a bijective function h^* from $E(G)$ to $\{1, 2, 3, \dots, q\}$ such that for each edge $e = uv \in E(G)$ holds $h^*(uv) = \lfloor \sqrt{h(u)h(v)} \rfloor$. A geometric mean graph is a graph that can be labeled with geometric mean labeling. In this article, we discussed a geometric mean labeling on a snake graph mC_n with $n = 5, 6, 7, 8$ and $m \geq 1$. Construction process of geometric mean labeling on snake graph mC_n with $n = 5, 6, 7, 8$ and $m \geq 1$ is done by labeling the vertices on the graph which induces edge labels that meet the definition of geometric mean labeling. The results from the construction of geometric mean labeling patterns on the snake graph mC_n with $n = 5, 6, 7, 8$ for $m \geq 1$ is a geometric mean graph.

Keywords: Geometric mean labeling, snake graph, label, injective function, bijective function

MSC2020: 05C78

Format sitasi: S.Sakti, F.Fransiskus, dan Yudhi, "Pelabelan Rata-Rata Geometris Graf Ular mC_n ", KUBIK J. Publ. Ilm. Mat., Vol. 11, No. 1, 2026, pp. 22-38, 2026.

Pendahuluan

^{*)} Corresponding Author

Diterima: 25-08-2024, Disetujui: 10-01-2026, Diterbitkan: 30-05-2026

Teori graf adalah kajian dalam matematika yang membahas tentang struktur yang disebut graf. Teori graf memiliki peran fundamental dalam menyelesaikan berbagai masalah, seperti pada jaringan rangkaian listrik, jalur transportasi, dan pengujian program [1]. Salah satu cara penerapannya adalah melalui pelabelan graf. Pelabelan graf merujuk pada fungsi yang memetakan elemen-elemen dari himpunan titik atau himpunan sisi dalam sebuah graf ke dalam bilangan asli yang dikenal sebagai label. Pelabelan graf dapat diterapkan dalam beberapa model matematika yang berguna untuk berbagai aplikasi. Beberapa contoh penerapan pelabelan graf meliputi radar dan sistem jaringan komunikasi, berbagai isu dalam teori pengkodean, automata, kristalografi sinar-X, bioinformatika, perancangan sirkuit, dan keamanan data [2]. Berdasarkan domain pelabelannya, domain fungsi pelabelan dapat berupa himpunan titik (pelabelan titik), himpunan sisi (pelabelan sisi) dan gabungan himpunan titik dan sisi (pelabelan total) [3].

Seiring perkembangan teori pelabelan graf, telah diperkenalkan banyak variasi pelabelan graf, termasuk pelabelan rata-rata. Penelitian sebelumnya, seperti yang dijelaskan dalam [4], contoh graf rata-rata diantaranya adalah graf lintasan dan graf siklus. Pelabelan rata-rata ini awalnya didasarkan pada konsep rata-rata aritmetika, namun kemudian berkembang menjadi variasi yang menggunakan konsep rata-rata geometris. Dalam artikel ini, membahas terkait pelabelan rata-rata geometris yang diterapkan pada kelas graf tertentu. Lebih lanjut, jika dapat dikonstruksi suatu pelabelan rata-rata geometris pada graf yang diberikan, graf ini disebut sebagai graf rata-rata geometris.

Pada dasarnya, berdasarkan konsep pelabelan rata-rata geometris, terdapat syarat yang harus dipenuhi agar suatu graf dapat dilakukan pelabelan rata-rata geometris. Secara umum pelabelan suatu graf tidaklah tunggal, demikian juga dengan pelabelan rata-rata geometris. Beberapa penelitian sebelumnya telah berhasil menunjukkan kelas graf tertentu yang merupakan graf rata-rata geometris. Pada penelitian [5] telah menunjukkan beberapa kelas graf seperti graf siklus C_n , graf ular mC_3 dan graf ular mC_4 adalah graf rata-rata geometris. Oleh karena itu, untuk graf ular $mC_n, n \geq 5$ dapat dianalisis lebih lanjut terkait pelabelan rata-rata geometrisnya.

Graf ular mC_n adalah graf terhubung yang terdiri dari m blok, dengan setiap blok memiliki titik potong berupa lintasan, dan masing-masing dari m blok tersebut isomorfik dengan graf siklus C_n untuk $m \geq 1$ dan $n \geq 3$ [6]. Definisi lainnya yaitu berdasarkan [5] menyatakan bahwa graf ular mC_n merupakan suatu graf yang dikonstruksi dari graf lintasan dengan panjang m dengan mengganti masing-masing sisinya dengan C_n , untuk $m \geq 1$ dan $n \geq 3$. Oleh karena itu, secara khusus pada artikel ini dibahas pelabelan rata-rata geometris untuk graf ular mC_n dengan $n = 5, 6, 7, 8$ dan $m \geq 1$.

Pembahasan difokuskan pada hubungan antara susunan blok siklus dan aturan pemberian label. Parameter m menyatakan banyaknya blok yang dirangkai, sedangkan n menyatakan banyaknya titik pada setiap siklus penyusunnya. Dengan demikian, perubahan nilai m pada satu keluarga graf berkaitan dengan panjang rangkaian blok, sementara empat nilai n yang dikaji membedakan bentuk siklus penyusun. Perbedaan kedua parameter ini menjadi dasar untuk membaca konstruksi pada masing-masing teorema. Hasil untuk setiap keluarga graf selanjutnya disajikan melalui fungsi pelabelan titik dan fungsi pelabelan sisi yang diinduksinya.

Metode

Metode yang digunakan adalah dengan mengkonstruksi suatu pelabelan rata-rata geometris pada suatu graf. Tahapan yang dilakukan untuk pelabelan pada graf ular mC_n dengan $n = 5, 6, 7, 8$ dan $m \geq 1$ adalah dengan menganalisis karakteristik graf tersebut (banyaknya simpul dan sisi) berdasarkan definisi pelabelan rata-rata geometris. Tahap selanjutnya adalah mengkonstruksi pelabelan titik untuk beberapa nilai m pada graf ular mC_n dengan $n = 5, 6, 7, 8$ dan $m \geq 1$ sehingga

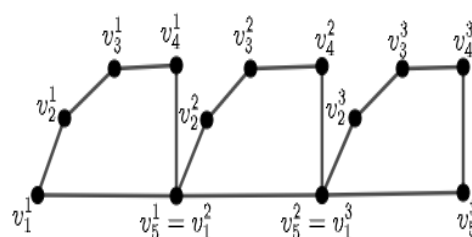
menghasilkan pelabelan sisi berdasarkan rata-rata geometris label pasangan titik-titik yang membentuk sisi. Kemudian hasil pelabelan tersebut membentuk sebuah pola label yang dapat diperumum dan dirumuskan menjadi suatu fungsi pada pelabelan rata-rata geometris. Langkah terakhir adalah membuktikan bahwa rumusan fungsi pelabelan tersebut memenuhi definisi pelabelan rata-rata geometris.

Pada tahap pengamatan struktur, titik yang menjadi pertemuan dua blok perlu dipahami sebagai satu titik pada graf yang sama. Penamaan titik menurut blok membantu menjelaskan letaknya dalam rangkaian, tetapi tidak menambah titik baru pada bagian pertemuan tersebut. Oleh sebab itu, penghitungan banyaknya titik dilakukan dengan memperhatikan hubungan antardua blok yang berurutan. Penghitungan sisi mengikuti sisi-sisi siklus penyusun yang telah dinyatakan dalam himpunan sisi. Informasi ini digunakan untuk menentukan himpunan bilangan yang tersedia sebagai kodomain fungsi pelabelan.

Tahap pembentukan pola dan tahap pembuktian memiliki peran yang saling melengkapi. Pelabelan pada beberapa nilai m digunakan untuk mengenali susunan label yang akan dituliskan sebagai fungsi. Setelah fungsi dirumuskan, pemeriksaan dilakukan terhadap syarat yang tercantum dalam definisi, bukan hanya terhadap tampilan contoh graf. Uraian pembuktian karena itu memisahkan pemeriksaan label titik dari pemeriksaan label sisi. Pemisahan tersebut memudahkan penelusuran bagaimana penetapan label pada titik menghasilkan label pada setiap pasangan titik yang bertetangga.

Sebelum membahas pelabelan rata-rata geometris, diberikan beberapa terminologi dasar terkait graf, diantaranya orde, ukuran, ketetanggaan, bersisian dan derajat. Suatu graf G dinyatakan dengan $G = (V(G), E(G))$ [1], $(V(G))$ merupakan himpunan titik yang tak kosong dan $(E(G))$ merupakan himpunan sisi dan subhimpunan dari $V(G) \times V(G)$. Kardinalitas $V(G)$ disebut orde dan kardinalitas $E(G)$ disebut ukuran dari graf G [7]. Jika terdapat suatu sisi $e = uv$ di G , u dan v disebut bertetangga (sisi e menghubungkan titik u dan v), u dan e serta v dan e disebut bersisian [8]. Banyaknya sisi e yang bersisian dengan titik v selanjutnya disebut derajat titik v [9]. Lebih lanjut, berdasarkan definisi graf ular mC_n yang telah dipaparkan pada bagian pendahuluan, ilustrasi bentuk graf ular mC_5 dengan $m = 3$ dapat dilihat pada Gambar 1.

Hubungan ketetanggaan digunakan untuk menentukan pasangan titik yang diperiksa dalam pembentukan label sisi. Dengan demikian, perhitungan tidak diterapkan pada sembarang dua titik, melainkan pada titik-titik yang memang dihubungkan oleh sisi pada graf. Sementara itu, orde dan ukuran menjelaskan banyaknya objek yang harus diberi label. Kedua informasi tersebut saling melengkapi: struktur menentukan pasangan yang diperiksa, sedangkan kardinalitas menentukan banyaknya label yang perlu diperhatikan. Terminologi ini digunakan secara berurutan ketika himpunan titik dan himpunan sisi dituliskan pada bagian pembuktian.



Gambar 1. Graf ular $3C_5$

Kajian struktur graf yang dibentuk melalui penggabungan juga mencakup amalgamasi graf [10]. Dalam perkembangan berikutnya, Bedi, Ollis, dan Ramesh mengkaji pelabelan prima pada graf ular

siklus seragam [11]. Penelitian tersebut relevan dari sisi keluarga graf yang digunakan, meskipun aturan pelabelan primanya berbeda dari pelabelan rata-rata geometris dalam artikel ini. Mariaraja dkk. membahas lucky edge geometric mean labeling beserta penerapannya pada jaringan listrik [12]. Keduanya memperlihatkan bahwa struktur graf dan aturan pembentukan label perlu dibedakan ketika membandingkan hasil pelabelan.

Pengembangan pelabelan berbasis rata-rata juga mencakup Heinz quarter mean labeling pada beberapa graf khusus [13], super classical mean labeling pada graf yang diperoleh dari lintasan [14], dan Cexp average assignments pada graf rantai [15]. Prabhu dan Sundaram meneliti super Lehmer-3 mean labeling pada graf yang berkaitan dengan graf theta [16], sedangkan Komarullah mengkaji mean labelling pada graf buku segitiga, tangga, siput, serta produk Kartesius siklus dan lintasan [17]. Kajian-kajian tersebut memberikan konteks perkembangan konstruksi pelabelan, dengan definisi masing-masing yang tetap perlu dibedakan dari Definisi 1 pada artikel ini.

Dari sisi algoritmik, Saraswathi, Meera, dan Lin membahas algoritma, kompleksitas, dan hasil keberadaan radio mean labeling [18]. Babu dan Meenakshi mengkaji varian weaker beserta deficiency pada even vertex odd edge root square mean labeling [19], kemudian pelabelan tersebut pada beberapa graf yang berkaitan dengan siklus [20]. Referensi-referensi terbaru ini digunakan sebagai konteks perkembangan penelitian pelabelan graf; konstruksi dalam artikel ini tetap menggunakan rata-rata geometris dan fungsi lantai sebagaimana didefinisikan berikut.

Perbedaan aturan pelabelan pada kajian-kajian tersebut menjadi alasan untuk menempatkan definisi sebagai acuan pembacaan hasil. Kesamaan keluarga graf yang digunakan tidak dengan sendirinya menyamakan cara memperoleh label sisinya. Dalam pembahasan ini, setiap konstruksi tetap ditelusuri dari label titik menuju label sisi melalui aturan yang dinyatakan pada Definisi 1. Oleh karena itu, konteks penelitian terdahulu membantu menempatkan topik kajian, sedangkan pemeriksaan fungsi yang disajikan mengikuti syarat pelabelan yang menjadi fokus artikel.

Hasil dan Diskusi

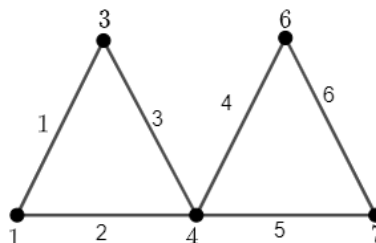
Misal diberikan suatu graf sederhana terhubung. Pelabelan rata-rata merupakan pelabelan yang label sisinya didasarkan pada rata-rata aritmetika label pasangan titik yang membentuk sisi tersebut. Berbeda dengan pelabelan rata-rata geometris yang menggunakan rata-rata geometri untuk pelabelan sisi graf yang diberikan. Definisi secara formal untuk pelabelan rata-rata geometris disajikan pada Definisi 1.

Definisi 1 [5] *Pelabelan rata-rata geometris pada graf $G = (V(G), E(G))$ yang memiliki p titik dan q sisi merupakan fungsi injektif h dengan domain himpunan titik $V(G)$ dan kodomain himpunan bilangan $\{1, 2, 3, \dots, q + 1\}$ yang menginduksikan fungsi bijektif h^* dengan domain himpunan sisi $E(G)$ dan kodomain himpunan bilangan $\{1, 2, 3, \dots, q\}$ sehingga untuk setiap sisi $e = uv$ berlaku $h^*(uv) = \lfloor \sqrt{h(u)h(v)} \rfloor$.*

Dalam definisi tersebut, sifat injektif pada h berarti bahwa dua titik yang berbeda tidak memperoleh label yang sama. Kodomain h menyatakan bilangan yang diperbolehkan sebagai label titik, sehingga tidak harus seluruh bilangan dalam kodomain digunakan. Adapun sifat bijektif pada h^* mengharuskan setiap bilangan dalam kodomain label sisi muncul tepat satu kali. Dengan demikian, pemeriksaan pada label titik dan label sisi mempunyai sasaran yang berbeda, meskipun keduanya saling berkaitan melalui aturan rata-rata geometris.

Fungsi lantai pada aturan pelabelan sisi dibaca sebagai bilangan bulat terbesar yang tidak melebihi nilai rata-rata geometris kedua label titik ujungnya. Karena itu, perhitungan label sisi dilakukan setelah kedua label titik diketahui. Dalam pembuktian, letak nilai rata-rata geometris di antara dua bilangan bulat berurutan digunakan untuk menentukan hasil fungsi lantai. Penjelasan ini mendasari penggunaan pertidaksamaan pada uraian berikut, sehingga hubungan antara perkalian label titik, akar kuadratnya, dan label sisi dapat ditelusuri secara berurutan.

Berdasarkan Definisi 1, diberikan contoh pelabelan rata-rata geometris pada Gambar 2.



Gambar 2. Pelabelan rata-rata geometris

Berdasarkan Gambar 2, karena graf yang diberikan mempunyai 6 sisi, bilangan-bilangan yang dapat digunakan sebagai label titik adalah $1, 2, 3, \dots, 7$. Berdasarkan pelabelan yang ditampilkan pada Gambar 2, masing-masing simpul mempunyai label yang berbeda dan menghasilkan label sisi berdasarkan Definisi 1.

Gambar tersebut dapat dibaca dengan terlebih dahulu memperhatikan bilangan pada titik, kemudian menelusuri sisi yang menghubungkan pasangan titik tersebut. Label sisi merupakan hasil penerapan aturan pada Definisi 1 terhadap pasangan label titik ujungnya. Oleh karena itu, contoh pelabelan tidak hanya memperlihatkan penempatan bilangan pada graf, tetapi juga memperlihatkan keterkaitan dua fungsi yang digunakan. Cara membaca yang sama diterapkan pada ilustrasi graf ular dalam pembahasan berikutnya.

Pelabelan rata-rata geometris berlaku untuk graf sederhana, terhubung dan nontrivial, serta tidak dapat dikonstruksi pada graf dengan $|V(G)| > |E(G)| + 1$. Hal tersebut karena jika $|V(G)| > |E(G)| + 1$, maka terdapat titik yang tidak memiliki label sehingga bukan merupakan fungsi injektif.

Lebih lanjut, berdasarkan Definisi 1, dapat dikonstruksi suatu pelabelan rata-rata geometris pada graf ular mC_5 , mC_6 , mC_7 dan mC_8 dan hasilnya dinyatakan pada Teorema 1 hingga Teorema 4.

Teorema 1. Graf ular mC_5 , $m \geq 1$ dan $m \in N$ merupakan graf rata-rata geometris.

Bukti Diberikan graf ular mC_5 dengan $m \geq 1$. Misalkan $V(mC_5) = \{v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, v_3^{(i)}, v_4^{(i)}, v_5^{(i)} : 1 \leq i \leq m, v_5^{(i)} = v_1^{(i+1)} : 1 \leq i < m\}$ dan $E(mC_5) = \{v_1^{(i)}v_2^{(i)}, v_2^{(i)}v_3^{(i)}, v_3^{(i)}v_4^{(i)}, v_4^{(i)}v_5^{(i)}, v_5^{(i)}v_1^{(i)} : 1 \leq i \leq m\}$. Jadi banyak titik pada graf ular mC_5 sebanyak $4m + 1$ dan sisi sebanyak $5m$. Didefinisikan suatu pelabelan titik dari graf ular mC_5 , $h: V(mC_5) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 5m + 1\}$ sehingga untuk $1 \leq i \leq m$,

$$\begin{aligned} h(v_1^{(i)}) &= 5i - 4 \\ h(v_2^{(1)}) &= 3 \\ h(v_2^{(i)}) &= 5i - 3, 1 < i \leq m \\ h(v_3^{(i)}) &= 5i - 1 \\ h(v_4^{(i)}) &= 5i \\ h(v_5^{(i)}) &= 5i + 1 \end{aligned} \quad (1)$$

Dengan pelabelan titik tersebut, diinduksi suatu pelabelan sisi, $h^*: E(mC_5) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 5m\}$, sehingga untuk $1 \leq i \leq m$,

$$\begin{aligned} h^*(v_1^{(i)}v_2^{(i)}) &= 5i - 4 \\ h^*(v_2^{(1)}v_3^{(1)}) &= 3 \\ h^*(v_2^{(i)}v_3^{(i)}) &= 5i - 3, 1 < i \leq m \\ h^*(v_3^{(i)}v_4^{(i)}) &= 5i - 1 \\ h^*(v_4^{(i)}v_5^{(i)}) &= 5i \\ h^*(v_5^{(1)}v_1^{(1)}) &= 2 \\ h^*(v_5^{(i)}v_1^{(i)}) &= 5i - 2, 1 < i \leq m. \end{aligned} \quad (2)$$

Persamaan (1) menyajikan aturan pemberian label titik menurut posisi titik dalam blok dan indeks bloknya. Persamaan (2) kemudian menyajikan label pada sisi-sisi yang menghubungkan titik-titik tersebut. Ketentuan yang ditulis khusus untuk blok pertama dibaca sesuai batas indeksnya, sedangkan ketentuan untuk blok berikutnya digunakan pada rentang indeks yang dicantumkan. Penyajian terpisah ini membantu pembaca menelusuri pasangan titik ujung sebelum mengikuti perhitungan label sisi pada setiap kasus.

1. Akan ditunjukkan bahwa h adalah fungsi injektif.

a. Untuk titik $v_1^{(i)}$

Diambil sebarang titik $v_1^{(i)}, v_1^{(k)} \in V(mC_5)$ dengan $h(v_1^{(i)}) = h(v_1^{(k)})$, didefinisikan $h(v_1^{(i)}) = 5(i) - 4$ dan $h(v_1^{(k)}) = 5(k) - 4$. Karena, $h(v_1^{(i)}) = h(v_1^{(k)})$ maka

$$\begin{aligned} 5(i) - 4 &= 5(k) - 4 \\ 5(i) &= 5(k) \end{aligned} \quad (3)$$

$$i = k.$$

- b. Untuk titik $v_2^{(i)}$ dengan $i = 1$

Diketahui $h(v_2^{(1)}) = 3$ dengan $i = 1$. Oleh karena itu, $h(v_2^{(1)}) \in \{1, 2, 3, \dots, 5m + 1\}$.

- c. Untuk titik $v_2^{(i)}$ dengan $1 < i \leq m$

Diambil sebarang titik $v_2^{(i)}, v_2^{(k)} \in V(mC_5)$ dengan $h(v_2^{(i)}) = h(v_2^{(k)})$, didefinisikan $h(v_2^{(i)}) = 5(i) - 3$ dan $h(v_2^{(k)}) = 5(k) - 3$. Karena, $h(v_2^{(i)}) = h(v_2^{(k)})$ maka

$$\begin{aligned} 5(i) - 3 &= 5(k) - 3 \\ 5(i) &= 5(k) \\ i &= k \end{aligned} \quad (4)$$

- d. Untuk titik $v_3^{(i)}$

Diambil sebarang titik $v_3^{(i)}, v_3^{(k)} \in V(mC_5)$ dengan $h(v_3^{(i)}) = h(v_3^{(k)})$, didefinisikan $h(v_3^{(i)}) = 5(i) - 1$ dan $h(v_3^{(k)}) = 5(k) - 1$. Karena, $h(v_3^{(i)}) = h(v_3^{(k)})$ maka

$$\begin{aligned} 5(i) - 1 &= 5(k) - 1 \\ 5(i) &= 5(k) \\ i &= k \end{aligned} \quad (5)$$

- e. Untuk titik $v_4^{(i)}$

Diambil sebarang titik $v_4^{(i)}, v_4^{(k)} \in V(mC_5)$ dengan $h(v_4^{(i)}) = h(v_4^{(k)})$, didefinisikan $h(v_4^{(i)}) = 5(i)$ dan $h(v_4^{(k)}) = 5(k)$. Karena, $h(v_4^{(i)}) = h(v_4^{(k)})$ maka

$$\begin{aligned} 5(i) &= 5(k) \\ i &= k \end{aligned} \quad (6)$$

Karena $i = k$ maka $(v_4^{(i)}) = (v_4^{(k)})$.

- f. Untuk titik $v_5^{(i)}$

Diambil sebarang titik $v_5^{(i)}, v_5^{(k)} \in V(mC_5)$ dengan $h(v_5^{(i)}) = h(v_5^{(k)})$, didefinisikan $h(v_5^{(i)}) = 5(i) + 1$ dan $h(v_5^{(k)}) = 5(k)$. Karena, $h(v_5^{(i)}) = h(v_5^{(k)})$ maka

$$\begin{aligned} 5(i) + 1 &= 5(k) + 1 \\ 5(i) &= 5(k) \\ i &= k \end{aligned} \quad (7)$$

Dengan demikian, terbukti h injektif.

2. Akan ditunjukkan h^* bijektif

Pada bagian ini, pengelompokan sisi mengikuti urutan pasangan titik dalam satu siklus. Sisi yang menghubungkan titik terakhir dengan titik pertama tetap menjadi bagian dari siklus yang sama dan dibahas bersama jenis sisi lainnya. Setiap kelompok diperiksa melalui label kedua titik ujungnya, lalu hasilnya dinyatakan sebagai bilangan bulat dengan fungsi lantai. Urutan tersebut membantu membedakan pembentukan nilai label dari perbandingan label pada indeks blok yang berbeda. Seluruh perhitungan berikut dibaca dengan mengacu pada ketentuan indeks dalam rumusan fungsi.

- a. Untuk sisi $v_1^{(i)}v_2^{(i)}$ dengan $1 \leq i \leq m$

Diambil sebarang $v_1^{(i)}v_2^{(i)}, v_1^{(k)}v_2^{(k)} \in E(mC_5)$ dengan $v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, v_1^{(k)}, v_2^{(k)} \in V(mC_5)$

dengan $\lfloor \sqrt{h(v_1^{(i)})h(v_2^{(i)})} \rfloor$ adalah bilangan bulat positif, sehingga didefinisikan pelabelan

pada sisi $v_1^{(i)}v_2^{(i)}$ adalah $h^*(v_1^{(i)}v_2^{(i)}) = \lfloor \sqrt{h(v_1^{(i)})h(v_2^{(i)})} \rfloor$ dan $h^*(v_1^{(k)}v_2^{(k)}) = \lfloor \sqrt{h(v_1^{(k)})h(v_2^{(k)})} \rfloor$.

Akan dibuktikan jika $i \neq k$ maka $h^*(v_1^{(i)}v_2^{(i)})$ selalu berbeda dengan $h^*(v_1^{(k)}v_2^{(k)})$.

$$\begin{aligned}
 1. \quad h^*(v_1^{(i)}v_2^{(i)}) &= \lfloor \sqrt{h(v_1^{(i)})h(v_2^{(i)})} \rfloor = \lfloor \sqrt{(5i-4)(5i-3)} \rfloor \\
 &\quad \sqrt{(5i-4)^2} < \sqrt{(5i-4)(5i-3)} < \sqrt{(5i-3)^2} \\
 &\Leftrightarrow 5i-4 < \sqrt{(5i-4)(5i-3)} < 5i-3 \\
 &\Leftrightarrow \lfloor 5i-4 \rfloor \leq \lfloor \sqrt{(5i-4)(5i-3)} \rfloor < \lfloor 5i-3 \rfloor \\
 &\quad h^*(v_1^{(i)}v_2^{(i)}) = \lfloor \sqrt{(5i-4)(5i-3)} \rfloor = 5i-4
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad h^*(v_1^{(k)}v_2^{(k)}) &= \lfloor \sqrt{h(v_1^{(k)})h(v_2^{(k)})} \rfloor = \lfloor \sqrt{(5k-4)(5k-3)} \rfloor \\
 &\quad \sqrt{(5i-4)^2} < \sqrt{(5i-4)(5i-3)} < \sqrt{(5i-3)^2} \\
 &\Leftrightarrow 5i-4 < \sqrt{(5i-4)(5i-3)} < 5i-3 \\
 &\Leftrightarrow \lfloor 5i-4 \rfloor \leq \lfloor \sqrt{(5i-4)(5i-3)} \rfloor < \lfloor 5i-3 \rfloor \\
 &\quad h^*(v_1^{(i)}v_2^{(i)}) = \lfloor \sqrt{(5i-4)(5i-3)} \rfloor = 5i-4
 \end{aligned} \tag{9}$$

Karena $i \neq k$ maka $(5(i)-4) \neq 5(k)-4$. Jadi, $h^*(v_1^{(i)}v_2^{(i)}) \neq h^*(v_1^{(k)}v_2^{(k)})$ untuk $i \neq k$.S

b. Untuk sisi $v_2^{(i)}v_3^{(i)}$ dengan $i = 1$

Diketahui $h(v_2^{(1)}) = 3$ dan $h(v_3^{(1)}) = 4$ maka $\lfloor \sqrt{h(v_2^{(1)})h(v_3^{(1)})} \rfloor$ adalah bilangan bulat positif. Berdasarkan definisi pelabelan rata-rata geometris pada sisi $v_2^{(1)}v_3^{(1)}$ adalah

$$\begin{aligned}
 h^*(v_2^{(1)}v_3^{(1)}) &= \lfloor \sqrt{h(v_2^{(1)})h(v_3^{(1)})} \rfloor \\
 &= \lfloor \sqrt{4(3)} \rfloor \\
 &= \lfloor \sqrt{12} \rfloor \\
 &= 3
 \end{aligned} \tag{10}$$

c. Untuk sisi $v_2^{(i)}v_3^{(i)}$ dengan $1 < i \leq m$

Diambil sebarang $v_2^{(i)}v_3^{(i)}, v_2^{(k)}v_3^{(k)} \in E(mC_5)$ dengan $v_2^{(i)}, v_3^{(i)}, v_2^{(k)}, v_3^{(k)} \in V(mC_5)$

dengan $\lfloor \sqrt{h(v_2^{(i)})h(v_3^{(i)})} \rfloor$ untuk $1 < i \leq m$ adalah bilangan bulat positif, sehingga

didefinisikan pelabelan pada sisi $v_2^{(i)}v_3^{(i)}$ adalah $h^*(v_2^{(i)}v_3^{(i)}) = \lfloor \sqrt{h(v_2^{(i)})h(v_3^{(i)})} \rfloor$ dan $h^*(v_2^{(k)}v_3^{(k)}) = \lfloor \sqrt{h(v_2^{(k)})h(v_3^{(k)})} \rfloor$.

Akan dibuktikan jika $i \neq k$ maka $h^*(v_2^{(i)}v_3^{(i)})$ selalu berbeda dengan $h^*(v_2^{(k)}v_3^{(k)})$.

$$1. \quad h^*(v_2^{(i)}v_3^{(i)}) = \lfloor \sqrt{h(v_2^{(i)})h(v_3^{(i)})} \rfloor = \lfloor \sqrt{(5i-3)(5i-1)} \rfloor$$

Jelas bahwa $(10i - 6) > 0$ dan $1 > 0$ untuk $i > 1$

Sehingga,

$$\begin{aligned}
 (5i - 3)(5i - 1) - (10i - 6) &< (5i - 3)(5i - 1) < (5i - 3)(5i - 1) + 1 \\
 &\Leftrightarrow 25i^2 - 30i + 9 < (5i - 3)(5i - 1) < 25i^2 - 20i + 4 \\
 &\Leftrightarrow (5i - 3)^2 < (5i - 3)(5i - 1) < (5i - 2)^2 \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{(5i - 3)^2} < \sqrt{(5i - 3)(5i - 1)} < \sqrt{(5i - 2)^2} \\
 &\Leftrightarrow 5i - 3 < \sqrt{(5i - 3)(5i - 1)} < 5i - 2 \\
 &\Leftrightarrow \lfloor 5i - 3 \rfloor \leq \lfloor \sqrt{(5i - 3)(5i - 1)} \rfloor < \lfloor 5i - 2 \rfloor \\
 h^*(v_2^{(i)} v_3^{(i)}) &= \lfloor \sqrt{(5i - 3)(5i - 1)} \rfloor = 5i - 3
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$2. h^*(v_2^{(k)} v_3^{(k)}) = \lfloor \sqrt{h(v_2^{(k)}) h(v_3^{(k)})} \rfloor = \lfloor \sqrt{(5k - 3)(5k - 1)} \rfloor$$

Jelas bahwa $(10k - 6) > 0$ dan $1 > 0$ untuk $k > 1$

Sehingga,

$$\begin{aligned}
 (5k - 3)(5k - 1) - (10k - 6) &< (5k - 3)(5k - 1) < (5k - 3)(5k - 1) + 1 \\
 &\Leftrightarrow 25k^2 - 30k + 9 < (5k - 3)(5k - 1) < 25k^2 - 20k + 4 \\
 &\Leftrightarrow (5k - 3)^2 < (5k - 3)(5k - 1) < (5k - 2)^2 \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{(5k - 3)^2} < \sqrt{(5k - 3)(5k - 1)} < \sqrt{(5k - 2)^2} \\
 &\Leftrightarrow 5k - 3 < \sqrt{(5k - 3)(5k - 1)} < 5k - 2 \\
 &\Leftrightarrow \lfloor 5k - 3 \rfloor \leq \lfloor \sqrt{(5k - 3)(5k - 1)} \rfloor < \lfloor 5k - 2 \rfloor \\
 h^*(v_2^{(k)} v_3^{(k)}) &= \lfloor \sqrt{(5k - 3)(5k - 1)} \rfloor = 5k - 3
 \end{aligned} \tag{12}$$

Karena $i \neq k$ maka $(5(i) - 3) \neq 5(k) - 3$. Sehingga $h^*(v_2^{(i)} v_3^{(i)}) \neq h^*(v_2^{(k)} v_3^{(k)})$ untuk $i \neq k$.

d. Untuk sisi $v_3^{(i)} v_4^{(i)}$ dengan $1 \leq i \leq m$

Diambil sebarang $v_3^{(i)} v_4^{(i)}, v_3^{(k)} v_4^{(k)} \in E(mC_5)$ dengan $v_3^{(i)}, v_4^{(i)}, v_3^{(k)}, v_4^{(k)} \in V(mC_5)$ dengan $\lfloor \sqrt{h(v_3^{(i)}) h(v_4^{(i)})} \rfloor$ untuk $1 \leq i \leq m$ adalah bilangan bulat positif, sehingga didefinisikan pelabelan pada sisi $v_3^{(i)} v_4^{(i)}$ adalah $h^*(v_3^{(i)} v_4^{(i)}) = \lfloor \sqrt{h(v_3^{(i)}) h(v_4^{(i)})} \rfloor$ dan $h^*(v_3^{(k)} v_4^{(k)}) = \lfloor \sqrt{h(v_3^{(k)}) h(v_4^{(k)})} \rfloor$.

Akan dibuktikan jika $i \neq k$ maka $h^*(v_3^{(i)} v_4^{(i)})$ selalu berbeda dengan $h^*(v_3^{(k)} v_4^{(k)})$.

$$\begin{aligned}
 1. h^*(v_3^{(i)} v_4^{(i)}) &= \lfloor \sqrt{h(v_3^{(i)}) h(v_4^{(i)})} \rfloor = \lfloor \sqrt{(5i - 1)(5i)} \rfloor \\
 &\quad \sqrt{(5i - 1)^2} < \sqrt{(5i - 1)(5i)} < \sqrt{(5i)^2} \\
 &\Leftrightarrow 5i - 1 < \sqrt{(5i - 1)(5i)} < 5i \\
 &\Leftrightarrow \lfloor 5i - 1 \rfloor \leq \lfloor \sqrt{(5i - 1)(5i)} \rfloor < \lfloor 5i \rfloor \\
 h^*(v_3^{(i)} v_4^{(i)}) &= \lfloor \sqrt{(5i - 1)(5i)} \rfloor = 5i - 1
 \end{aligned} \tag{13}$$

$$2. h^*(v_3^{(k)} v_4^{(k)}) = \lfloor \sqrt{h(v_3^{(k)}) h(v_4^{(k)})} \rfloor = \lfloor \sqrt{(5(k) - 1)(5(k))} \rfloor$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{(5k-1)^2} &< \sqrt{(5k-1)(5k)} < \sqrt{(5k)^2} \\
\Leftrightarrow 5k-1 &< \sqrt{(5k-1)(5k)} < 5k \\
\Leftrightarrow \lfloor 5k-1 \rfloor &\leq \lfloor \sqrt{(5k-1)(5k)} \rfloor < \lfloor 5k \rfloor \\
h^*(v_3^{(k)}v_4^{(k)}) &= \lfloor \sqrt{(5k-1)(5k)} \rfloor = 5k-1
\end{aligned} \tag{14}$$

Karena $i \neq k$ maka $(5(i)-1) \neq 5(k)-1$. Jadi, $h^*(v_3^{(i)}v_4^{(i)}) \neq h^*(v_3^{(k)}v_4^{(k)})$ untuk $i \neq k$.

e. Untuk sisi $v_4^{(i)}v_5^{(i)}$ dengan $1 \leq i \leq m$

Diambil sebarang $v_4^{(i)}v_5^{(i)}, v_4^{(k)}v_5^{(k)} \in E(mC_5)$ dengan $v_4^{(i)}, v_5^{(i)}, v_4^{(k)}, v_5^{(k)} \in V(mC_5)$

dengan $\lfloor \sqrt{h(v_4^{(i)})h(v_5^{(i)})} \rfloor$ untuk $1 \leq i \leq m$ adalah bilangan bulat positif, sehingga

didefinisikan pelabelan pada sisi $v_4^{(i)}v_5^{(i)}$ adalah $h^*(v_4^{(i)}v_5^{(i)}) = \lfloor \sqrt{h(v_4^{(i)})h(v_5^{(i)})} \rfloor$ dan

$$h^*(v_4^{(k)}v_5^{(k)}) = \lfloor \sqrt{h(v_4^{(k)})h(v_5^{(k)})} \rfloor.$$

Akan dibuktikan jika $i \neq k$ maka $h^*(v_4^{(i)}v_5^{(i)})$ selalu berbeda dengan $h^*(v_4^{(k)}v_5^{(k)})$.

$$1. h^*(v_4^{(i)}v_5^{(i)}) = \lfloor \sqrt{h(v_4^{(i)})h(v_5^{(i)})} \rfloor = \lfloor \sqrt{(5i)(5i+1)} \rfloor$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{(5i)^2} &< \sqrt{(5i)(5i+1)} < \sqrt{(5i+1)^2} \\
\Leftrightarrow 5i &< \sqrt{(5i)(5i+1)} < 5i+1 \\
\Leftrightarrow \lfloor 5i \rfloor &\leq \lfloor \sqrt{(5i)(5i+1)} \rfloor < \lfloor 5i+1 \rfloor \\
h^*(v_4^{(i)}v_5^{(i)}) &= \lfloor \sqrt{(5i)(5i+1)} \rfloor = 5i
\end{aligned} \tag{15}$$

$$2. h^*(v_4^{(k)}v_5^{(k)}) = \lfloor \sqrt{h(v_4^{(k)})h(v_5^{(k)})} \rfloor = \lfloor \sqrt{(5k)(5k+1)} \rfloor$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{(5k)^2} &< \sqrt{(5k)(5k+1)} < \sqrt{(5k+1)^2} \\
\Leftrightarrow 5k &< \sqrt{(5k)(5k+1)} < 5k+1 \\
\Leftrightarrow \lfloor 5k \rfloor &\leq \lfloor \sqrt{(5k)(5k+1)} \rfloor < \lfloor 5k+1 \rfloor \\
h^*(v_4^{(k)}v_5^{(k)}) &= \lfloor \sqrt{(5k)(5k+1)} \rfloor = 5k
\end{aligned} \tag{16}$$

Karena $i \neq k$ maka $5(i) \neq 5(k)$. Jadi, $h^*(v_4^{(i)}v_5^{(i)}) \neq h^*(v_4^{(k)}v_5^{(k)})$ untuk $i \neq k$.

f. Untuk sisi $v_5^{(i)}v_1^{(i)}$ dengan $i = 1$

Diketahui $h(v_5^{(1)}) = 6$ dan $h(v_1^{(1)}) = 1$ maka $\lfloor \sqrt{h(v_5^{(1)})h(v_1^{(1)})} \rfloor$ adalah bilangan bulat positif. Berdasarkan definisi pelabelan rata-rata geometris pada sisi $v_5^{(1)}v_1^{(1)}$ adalah

$$h^*(v_5^{(1)}v_1^{(1)}) = \lfloor \sqrt{h(v_5^{(1)})h(v_1^{(1)})} \rfloor$$

$$h^*(v_5^{(1)}v_1^{(1)}) = \lfloor \sqrt{h(v_5^{(1)})h(v_1^{(1)})} \rfloor \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
&= \lfloor \sqrt{6(1)} \rfloor \\
&= \lfloor \sqrt{6} \rfloor \\
&= 2
\end{aligned}$$

g. Untuk sisi $v_5^{(i)}v_1^{(i)}$ dengan $1 < i \leq m$

Diambil sebarang $v_5^{(i)}v_1^{(i)}, v_5^{(k)}v_1^{(k)} \in E(mC_5)$ dengan $v_5^{(i)}, v_1^{(i)}, v_5^{(k)}, v_1^{(k)} \in V(mC_5)$

dengan $\lfloor \sqrt{h(v_5^{(i)})h(v_1^{(i)})} \rfloor$ untuk $1 < i \leq m$ adalah bilangan bulat positif, sehingga

didefinisikan pelabelan pada sisi $v_5^{(i)}v_1^{(i)}$ adalah $h^*(v_5^{(i)}v_1^{(i)}) = \lfloor \sqrt{h(v_5^{(i)})h(v_1^{(i)})} \rfloor$ dan

$$h^*(v_5^{(k)}v_1^{(k)}) = \lfloor \sqrt{h(v_5^{(k)})h(v_1^{(k)})} \rfloor.$$

Akan dibuktikan jika $i \neq k$ maka $h^*(v_5^{(i)}v_1^{(i)})$ selalu berbeda dengan $h^*(v_5^{(k)}v_1^{(k)})$.

$$1. \quad h^*(v_5^{(i)}v_1^{(i)}) = \lfloor \sqrt{h(v_5^{(i)})h(v_1^{(i)})} \rfloor = \lfloor \sqrt{(5i+1)(5i-4)} \rfloor$$

Jelas bahwa $(5i-8) > 0$ dan $5i+5 > 0$ untuk $i > 1$

Sehingga,

$$\begin{aligned}
(5i+1)(5i-4) - (5i-8) &< (5i+1)(5i-4) < (5i+1)(5i-4) + 5i+5 \\
&\Leftrightarrow 25i^2 - 20i + 4 < (5i+1)(5i-4) < 25i^2 - 10i + 1 \\
&\Leftrightarrow (5i-2)^2 < (5i+1)(5i-4) < (5i-1)^2 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{(5i-2)^2} < \sqrt{(5i+1)(5i-4)} < \sqrt{(5i-1)^2} \\
&\Leftrightarrow 5i-2 < \sqrt{(5i+1)(5i-4)} < 5i-1 \\
&\Leftrightarrow \lfloor 5i-2 \rfloor \leq \lfloor \sqrt{(5i+1)(5i-4)} \rfloor < \lfloor 5i-1 \rfloor
\end{aligned} \tag{18}$$

$$h^*(v_5^{(i)}v_1^{(i)}) = \lfloor \sqrt{(5i+1)(5i-4)} \rfloor = 5i-2$$

$$2. \quad h^*(v_5^{(k)}v_1^{(k)}) = \lfloor \sqrt{h(v_5^{(k)})h(v_1^{(k)})} \rfloor = \lfloor \sqrt{(5k+1)(5k-4)} \rfloor$$

Jelas bahwa $(5k-8) > 0$ dan $5k+5 > 0$ untuk $k > 1$

Sehingga,

$$\begin{aligned}
(5k+1)(5k-4) - (5k-8) &< (5k+1)(5k-4) < (5k+1)(5k-4) + 5k+5 \\
&\Leftrightarrow 25k - 20k + 4 < (5k+1)(5k-4) < 25k^2 - 10k + 1 \\
&\Leftrightarrow (5k-2)^2 < (5k+1)(5k-4) < (5k-1)^2 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{(5k-2)^2} < \sqrt{(5k+1)(5k-4)} < \sqrt{(5k-1)^2} \\
&\Leftrightarrow 5k-2 < \sqrt{(5k+1)(5k-4)} < 5k-1 \\
&\Leftrightarrow \lfloor 5k-2 \rfloor \leq \lfloor \sqrt{(5k+1)(5k-4)} \rfloor < \lfloor 5k-1 \rfloor
\end{aligned} \tag{19}$$

$$h^*(v_5^{(k)}v_1^{(k)}) = \lfloor \sqrt{(5k+1)(5k-4)} \rfloor = 5k-2$$

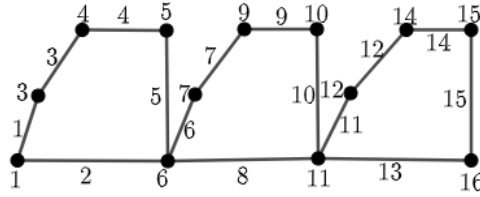
Karena $i \neq k$ maka $5i-2 \neq 5k-2$. Jadi, $h^*(v_5^{(i)}v_1^{(i)}) \neq h^*(v_5^{(k)}v_1^{(k)})$ untuk $i \neq k$.

Berdasarkan hasil yang diperoleh bahwa $h^*(uv)$ selalu ada dan berbeda untuk setiap $uv \in mC_5$. Jadi, f^* adalah fungsi bijektif.

Jadi dapat disimpulkan bahwa graf ular mC_5 dengan $m \geq 1$ merupakan graf rata-rata geometris.

Uraian pada Teorema 1 memperlihatkan susunan pembuktian yang digunakan dalam pembahasan ini. Setelah aturan label titik dinyatakan, pembahasan beralih pada sisi menurut pasangan titik yang membentuknya. Perhitungan untuk indeks blok yang berbeda dituliskan agar hubungan antara indeks dan nilai label dapat diamati. Contoh sesudah pembuktian berfungsi memperlihatkan penerapan rumusan tersebut pada graf tertentu. Dengan demikian, pembaca dapat menghubungkan uraian simbolik dengan posisi label pada rangkaian siklus yang ditampilkan.

Penerapan fungsi yang dikonstruksi untuk pelabelan rata-rata geometris pada Teorema 1, dapat dilihat pada contoh pelabelan rata-rata geometris $3C_5$ yang disajikan pada Gambar 3.



Gambar 3. Pelabelan Graf $3C_5$

Teorema 2. Graf ular mC_6 , $m \geq 1$ dan $m \in \mathbb{N}$ merupakan graf rata-rata geometris.

Bukti Diberikan graf ular mC_6 dengan $m \geq 1$. Misalkan $V(mC_6) = \{v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, v_3^{(i)}, v_4^{(i)}, v_5^{(i)}, v_6^{(i)} : 1 \leq i \leq m, v_6^{(i)} = v_1^{(i+1)} : 1 \leq i < m\}$ dan $E(mC_6) = \{v_1^{(i)}v_2^{(i)}, v_2^{(i)}v_3^{(i)}, v_3^{(i)}v_4^{(i)}, v_4^{(i)}v_5^{(i)}, v_5^{(i)}v_6^{(i)}, v_6^{(i)}v_1^{(i)} : 1 \leq i \leq m\}$. Jadi banyak titik pada graf ular mC_6 sebanyak $5m + 1$ dan sisi sebanyak $6m$. Didefinisikan pelabelan rata-rata geometris untuk setiap titik dari graf ular mC_6 $h: V(mC_6) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 6m + 1\}$ sehingga untuk $1 \leq i \leq m$,

$$\begin{aligned}
 h(v_1^{(i)}) &= 6i - 5 \\
 h(v_2^{(1)}) &= 3 \\
 h(v_2^{(i)}) &= 6i - 4, \quad 1 < i \leq m \\
 h(v_3^{(i)}) &= 6i - 2 \\
 h(v_4^{(i)}) &= 6i - 1 \\
 h(v_5^{(i)}) &= 6i \\
 h(v_6^{(i)}) &= 6i + 1
 \end{aligned} \tag{20}$$

Dengan pelabelan titik tersebut, diinduksi suatu pelabelan sisi $h^*: E(mC_6) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 6m\}$ sehingga untuk $1 \leq i \leq m$,

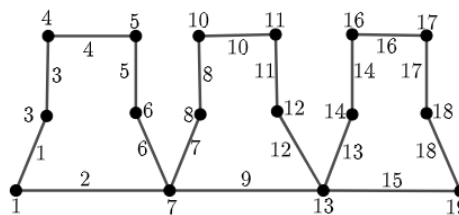
$$\begin{aligned}
 h^*(v_1^{(i)}v_2^{(i)}) &= 6i - 5 \\
 h^*(v_2^{(1)}v_3^{(1)}) &= 3 \\
 h^*(v_2^{(i)}v_3^{(i)}) &= 6i - 4, \quad 1 < i \leq m \\
 h^*(v_3^{(i)}v_4^{(i)}) &= 6i - 2 \\
 h^*(v_4^{(i)}v_5^{(i)}) &= 6i - 1 \\
 h^*(v_5^{(i)}v_6^{(i)}) &= 6i \\
 h^*(v_6^{(1)}v_1^{(1)}) &= 2
 \end{aligned} \tag{21}$$

$$h^*(v_6^{(i)} v_1^{(i)}) = 6i - 3, 1 < i \leq m.$$

Selanjutnya dengan menerapkan proses pembuktian yang serupa dengan pembuktian Teorema 1, diperoleh bahwa $h^*(uv)$ selalu ada dan berbeda untuk setiap $uv \in mC_6$. Jadi, h^* adalah fungsi bijektif. Dengan demikian, graf ular mC_6 dengan $m \geq 1$ merupakan graf rata-rata geometris.

Pada penyajian untuk siklus dengan enam titik, persamaan label titik dan label sisi tetap dibaca sebagai satu rangkaian konstruksi. Pembaca dapat menelusuri setiap sisi pada himpunan sisi, mengambil label kedua titik ujung dari Persamaan (20), kemudian menghubungkannya dengan bentuk label sisi pada Persamaan (21). Urutan ini menjelaskan maksud penerapan proses pembuktian yang serupa dengan Teorema 1. Gambar 4 selanjutnya memberikan ilustrasi posisi label untuk tiga blok, sehingga hubungan antartitik dalam setiap siklus dan pertemuan blok dapat dilihat bersama.

Penerapan fungsi yang dikonstruksi untuk pelabelan rata-rata geometris pada Teorema 2, dapat dilihat pada contoh pelabelan rata-rata geometris untuk graf $3C_6$ pada Gambar 4.



Gambar 4. Pelabelan Graf $3C_6$

Teorema 3. Graf ular mC_7 dengan $m \geq 1$ dan $m \in N$ merupakan graf rata-rata geometris.

Bukti Diberikan suatu graf ular mC_7 dengan $m \geq 1$ dan $m \in N$. Misalkan himpunan titik dari graf ular mC_7 , $V(mC_7) = \{v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, v_3^{(i)}, v_4^{(i)}, v_5^{(i)}, v_6^{(i)}, v_7^{(i)} : 1 \leq i \leq m, v_8^{(i)} = v_1^{(i+1)} : 1 \leq i < m\}$ dan himpunan sisi dari graf ular- mC_7 , $E(mC_7) = \{v_1^{(i)} v_2^{(i)}, v_2^{(i)} v_3^{(i)}, v_3^{(i)} v_4^{(i)}, v_4^{(i)} v_5^{(i)}, v_5^{(i)} v_6^{(i)}, v_6^{(i)} v_7^{(i)}, v_7^{(i)} v_1^{(i)} : 1 \leq i \leq m\}$. Jadi banyak titik pada graf ular mC_7 sebanyak $6m + 1$ dan sisi sebanyak $7m$. Didefinisikan pelabelan rata-rata geometris untuk setiap titik dari graf ular mC_7 $h: V(mC_7) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 7m + 1\}$ sehingga untuk $1 \leq i \leq m$,

$$\begin{aligned} h(v_1^{(i)}) &= 7i - 6 \\ h(v_2^{(1)}) &= 3 \\ h(v_2^{(i)}) &= 7i - 5, 1 < i \leq m \\ h(v_3^{(i)}) &= 7i - 3 \\ h(v_3^{(i)}) &= 7i - 4, 3 \leq i \leq m \\ h(v_4^{(i)}) &= 7i - 2 \\ h(v_5^{(i)}) &= 7i - 1 \\ h(v_6^{(i)}) &= 7i \\ h(v_7^{(i)}) &= 7i + 1 \end{aligned} \tag{22}$$

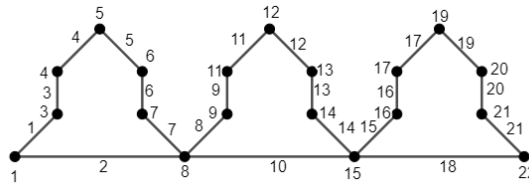
Dengan pelabelan titik tersebut, diinduksi suatu pelabelan sisi $h^*: E(mC_7) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 7m\}$ sehingga untuk $1 \leq i \leq m$,

$$\begin{aligned}
h^*(v_1^{(i)} v_2^{(i)}) &= 7i - 6 \\
h^*(v_2^{(1)} v_3^{(1)}) &= 3 \\
h^*(v_2^{(i)} v_3^{(i)}) &= 7i - 5, 1 < i \leq m \\
h^*(v_3^{(i)} v_4^{(i)}) &= 7i - 3, 1 \leq i \leq 2 \\
h^*(v_3^{(i)} v_4^{(i)}) &= 7i - 4, 2 < i \leq m \\
h^*(v_4^{(i)} v_5^{(i)}) &= 7i - 2 \\
h^*(v_5^{(i)} v_6^{(i)}) &= 7i - 1 \\
h^*(v_6^{(i)} v_7^{(i)}) &= 7i \\
h^*(v_7^{(i)} v_1^{(i)}) &= 8i - 6 \\
h^*(v_7^{(i)} v_1^{(i)}) &= 7i - 3
\end{aligned} \tag{23}$$

Selanjutnya dengan menerapkan proses pembuktian yang serupa dengan pembuktian Teorema 1, diperoleh $h^*(uv)$ selalu ada dan berbeda untuk setiap $uv \in mC_7$. Jadi, h^* adalah fungsi bijektif. Dengan demikian, graf ular mC_7 dengan $m \geq 1$ merupakan graf rata-rata geometris.

Penyajian Teorema 3 juga memisahkan rumusan label titik dan label sisi agar ketergantungan keduanya tetap terlihat. Dalam membaca rumusan yang memuat batas indeks, batas tersebut merupakan bagian dari aturan yang sedang digunakan. Oleh sebab itu, pembacaan dilakukan dengan memperhatikan posisi titik atau sisi sekaligus indeks bloknya. Ilustrasi untuk tiga blok yang diberikan sesudah teorema membantu menempatkan notasi tersebut pada gambar graf. Peran ilustrasi ini adalah mendampingi uraian konstruksi yang telah dinyatakan dalam bentuk fungsi.

Penerapan fungsi yang dikonstruksi untuk pelabelan rata-rata geometris pada Teorema 3, dapat dilihat pada contoh pelabelan rata-rata geometris untuk graf $3C_7$ pada Gambar 5.



Gambar 5. Pelabelan Graf $3C_7$

Teorema 4 Graf ular mC_8 , $m \geq 1$ dan $m \in \mathbb{N}$ merupakan graf rata-rata geometris.

Bukti Diberikan suatu Graf ular mC_8 dengan $m \geq 1$ dan $m \in \mathbb{N}$. Misalkan himpunan titik dari graf ular mC_8 , $V(mC_8) = \{v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, v_3^{(i)}, v_4^{(i)}, v_5^{(i)}, v_6^{(i)}, v_7^{(i)}, v_8^{(i)} : 1 \leq i \leq m, v_8^{(i)} = v_1^{(i+1)} : 1 \leq i < m\}$ dan himpunan sisi dari graf ular- mC_8 , $E(mC_8) = \{v_1^{(i)} v_2^{(i)}, v_2^{(i)} v_3^{(i)}, v_3^{(i)} v_4^{(i)}, v_4^{(i)} v_5^{(i)}, v_5^{(i)} v_6^{(i)}, v_6^{(i)} v_7^{(i)}, v_7^{(i)} v_8^{(i)}, v_8^{(i)} v_1^{(i)} : 1 \leq i \leq m\}$. Jadi banyak titik pada graf ular mC_8 sebanyak $7m + 1$ dan sisi sebanyak $8m$. Didefinisikan pelabelan rata-rata geometris untuk setiap titik dari graf ular mC_8 $h: V(mC_8) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 8m + 1\}$ sehingga untuk $1 \leq i \leq m$,

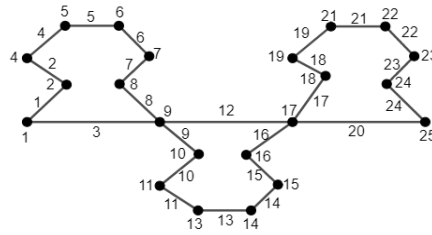
$$\begin{aligned}
h(v_1^{(i)}) &= 8i - 7 \\
h(v_2^{(i)}) &= 8i - 6 \\
h(v_3^{(1)}) &= 4 \\
h(v_3^{(i)}) &= 8i - 5, 1 < i \leq m \\
h(v_4^{(i)}) &= 8i - 3 \\
h(v_5^{(i)}) &= 8i - 2 \\
h(v_6^{(i)}) &= 8i - 1 \\
h(v_7^{(i)}) &= 8i \\
h(v_8^{(i)}) &= 8i + 1
\end{aligned} \tag{24}$$

Dengan pelabelan titik tersebut, diinduksi suatu pelabelan sisi $h^*: E(mC_8) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 8m\}$ sehingga untuk $1 \leq i \leq m$,

$$\begin{aligned}
h^*(v_1^{(i)}v_2^{(i)}) &= 8i - 7 \\
h^*(v_2^{(i)}v_3^{(i)}) &= 8i - 6, h^*(v_3^{(1)}v_4^{(1)}) = 4 \\
h^*(v_3^{(i)}v_4^{(i)}) &= 8i - 5, 1 < i \leq m \\
h^*(v_4^{(i)}v_5^{(i)}) &= 8i - 3 \\
h^*(v_5^{(i)}v_6^{(i)}) &= 8i - 2 \\
h^*(v_6^{(i)}v_7^{(i)}) &= 8i - 1 \\
h^*(v_7^{(i)}v_8^{(i)}) &= 8i \\
h^*(v_8^{(1)}v_1^{(1)}) &= 3 \\
h^*(v_8^{(i)}v_1^{(i)}) &= 8i - 4, 1 < i \leq m,
\end{aligned} \tag{25}$$

Selanjutnya dengan menerapkan proses pembuktian yang serupa dengan pembuktian Teorema 1, diperoleh $h^*(uv)$ selalu ada dan berbeda untuk setiap $uv \in mC_8$. Jadi, h^* adalah fungsi bijektif. Dengan demikian, graf ular mC_8 dengan $m \geq 1$ merupakan graf rata-rata geometris.

Untuk keluarga graf dengan siklus delapan titik, pasangan rumusan pada Persamaan (24) dan (25) menunjukkan urutan penyajian yang sama: penetapan label titik diikuti label sisi yang diinduksi. Perbedaan posisi titik dalam siklus dibaca melalui indeks bawah, sedangkan urutan blok ditunjukkan oleh indeks blok. Pada contoh yang disajikan, penelusuran dapat dilakukan dari satu blok ke blok berikutnya dengan memperhatikan titik pertemuan. Cara pembacaan tersebut menjaga keterkaitan antara gambar dan rumusan, tanpa melepaskan batas nilai parameter yang digunakan pada teorema. Berikut diberikan suatu contoh hasil pelabelan rata-rata geometris graf ular $3C_8$ yang disajikan pada Gambar 6.



Gambar 6. Pelabelan Graf $3C_8$

Gambar 3 sampai Gambar 6 menampilkan penerapan konstruksi pada jumlah blok yang sama, yaitu tiga blok, dengan bentuk siklus penyusun yang berbeda. Penyajian ini memudahkan pembaca mengikuti perubahan banyaknya titik dan sisi di dalam setiap blok tanpa mengubah cara membaca label. Bilangan pada titik dipahami sebagai nilai fungsi pelabelan titik, sedangkan bilangan pada sisi dipahami sebagai nilai fungsi yang diinduksi. Setiap gambar karena itu perlu dibaca bersama teorema dan rumusan yang mendahuluinya.

Keempat teorema disusun berdasarkan nilai n yang dikaji dalam artikel. Parameter m tetap menyatakan banyaknya blok pada masing-masing keluarga graf, sehingga contoh dengan tiga blok merupakan ilustrasi dari pembahasan yang menggunakan parameter tersebut. Hubungan antara definisi, rumusan fungsi, pembuktian, dan gambar membentuk urutan penyajian hasil. Definisi memberikan syarat pelabelan, rumusan menyatakan konstruksi yang dibahas, pembuktian menguraikan pemeriksaannya, dan gambar memperlihatkan penempatan label pada contoh yang dipilih.

Kesimpulan

Berdasarkan definisinya, pelabelan rata-rata geometris berlaku untuk graf sederhana, terhubung dan nontrivial, serta tidak dapat dikonstruksi pada graf dengan $|V(G)| > |E(G)| + 1$. Graf ular mC_n dengan $n = 5, 6, 7, 8$ dan $m \geq 1, m \in \mathbb{N}$ merupakan graf yang memenuhi kondisi tersebut. Berdasarkan hasil konstruksi pelabelan rata-rata geometris diperoleh bahwa graf ular mC_n dengan $n = 5, 6, 7, 8$ dan $m \geq 1, m \in \mathbb{N}$ merupakan graf rata-rata geometris.

Referensi

- [1] R. Munir, "Matematika Diskrit Edisi Ketiga," Inform. Bdg. Bdg., 2010.
- [2] Dafik, "Structural properties and labeling of graphs," 2007.
- [3] K. P. CAHAYANI, R. H. Soelistyo, and S. ZAKI, "Pelabelan Cordial dan Graceful pada Arbitrary Supersubdivision Path dan Star," 2013.
- [4] R. Ponraj and S. Somasundaram, "Mean labeling of graphs obtained by identifying two graphs," *J. Discrete Math. Sci. Cryptogr.*, vol. 11, no. 2, pp. 239–252, 2008.
- [5] A. D. Baskar, S. Arockiaraj, and B. Rajendran, "Geometric mean labeling of graphs obtained from some graph operations," *Int. J. Math. Comb.*, vol. 1, p. 85, 2013.
- [6] J. A. Gallian, "A dynamic survey of graph labeling," *Electron. J. Comb.*, vol. 1, no. DynamicSurveys, p. DS6, 2018.
- [7] G. Chartrand and O. R. Oellermann, "Applied and algorithmic graph theory," *N. Y. McGraw-Hill*, 1993.
- [8] Samuel Wibisono, *Matematika Diskrit Edisi Kedua*. Yogyakarta: Graha Ilmu, 2013.

- [9] Gary Chartrand and Linda Lesniak, *Graph and Digraph*. California: a Division of Wadsworth, Inc. Combinatoria 2, 1996.
- [10] R. Ardiansyah, "Bilangan kromatik graf hasil amalgamasi dua buah graf," *J. Sains Dan Seni POMITS*, vol. 2, no. 1, pp. 1–5, 2013.
- [11] A. Bedi, M. Ollis, and S. Ramesh, "On Prime Labelings of Uniform Cycle Snake Graphs," *The PUMP Journal of Undergraduate Research*, vol. 6, pp. 151–171, 2023, doi: 10.46787/pump.v6i0.3633.
- [12] P. Mariaraja et al., "Lucky edge geometric mean labeling of graphs and applications in electrical networks," *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, vol. 27, no. 7, pp. 2133–2141, 2024, doi: 10.47974/JDMSC-2086.
- [13] S. Latha and S. S. Sandhya, "Heinz Quarter Mean Labeling of Some Special Graphs," *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, vol. 70, no. 4, pp. 38–44, 2024, doi: 10.14445/22315373/IJMTT-V70I4P105.
- [14] A. Rajesh Kannan, G. Thirupathi, and S. Murali Krishnan, "Further investigation on the super classical mean labeling of graphs obtained from paths," *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, vol. 48, no. 5, pp. 747–753, 2025, doi: 10.3233/JIFS-232328.
- [15] A. Rajesh Kannan, "A Novel Approach to Cexp Average Assignments on Chain Graphs," *Baghdad Science Journal*, vol. 22, no. 4, pp. 1317–1323, 2025, doi: 10.21123/bsj.2024.11034.
- [16] D. Praveen Prabhu and O. V. Shanmuga Sundaram, "Investigation of super lehmer – 3 mean labeling in theta related graphs," *Statistics, Optimization & Information Computing*, vol. 14, no. 4, pp. 2070–2090, 2025, doi: 10.19139/soic-2310-5070-2633.
- [17] H. Komarullah, "Mean Labelling on Some Graph," *Jurnal MSA (Matematika dan Statistika serta Aplikasinya)*, vol. 13, no. 2, pp. 23–31, 2025, doi: 10.24252/msa.v13i2.58710.
- [18] M. Saraswathi, K. N. Meera, and Y. Lin, "Radio Mean Labeling Algorithm, Its Complexity and Existence Results," *Mathematics*, vol. 13, no. 13, Art. no. 2057, 2025, doi: 10.3390/math13132057.
- [19] K. N. Babu and S. Meenakshi, "Weaker and deficiency of even vertex odd edge root square mean labeling graphs," *Journal of the Nigerian Society of Physical Sciences*, vol. 8, no. 2, Art. no. 3287, 2026, doi: 10.46481/jnsps.2026.3287.
- [20] K. N. Babu and S. Meenakshi, "Even vertex odd edge root square mean labeling of some cycle-related graphs," *Journal of the Nigerian Society of Physical Sciences*, vol. 8, no. 3, Art. no. 3293, 2026, doi: 10.46481/jnsps.2026.3293.