

Kontrol Optimal Model Penyebaran Penyakit Demam Berdarah Dengue Menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin

Oktavia Arnelliza Ayu^{1, *} Bayu Prihandono²⁾ Nilamsari Kusumastuti³⁾

^{1,2,3}Universitas Tanjungpura, Indonesia

^{*)}email: h1011211031@student.untan.ac.id

Demam berdarah dengue (DBD) merupakan masalah kesehatan masyarakat di Indonesia karena penularannya melibatkan interaksi manusia dan nyamuk vektor. Pengendalian perkembangbiakan nyamuk dapat dilakukan melalui pemberian larvasida dan gerakan 3M, tetapi intensitas kedua intervensi perlu dipertimbangkan bersama biaya penerapannya. Penelitian ini bertujuan menentukan bentuk kontrol optimal pada model penyebaran DBD yang terdiri atas enam subpopulasi, yaitu manusia rentan, manusia terinfeksi, manusia pulih, nyamuk fase akuatik, nyamuk rentan, dan nyamuk terinfeksi. Dua variabel kontrol yang digunakan adalah pemberian larvasida dan pelaksanaan gerakan 3M. Sistem kontrol dirumuskan menggunakan prinsip minimum Pontryagin melalui pembentukan fungsi Hamiltonian, persamaan keadaan, persamaan pendamping, dan kondisi stasioner. Solusi numerik dihitung dengan metode sweep maju-mundur berbasis Runge–Kutta orde empat menggunakan Python selama horizon simulasi 365 hari. Fungsi objektif diarahkan untuk menekan populasi nyamuk fase akuatik dengan mempertimbangkan beban kedua kontrol. Pada skenario tanpa kontrol, kurva simulasi menunjukkan peningkatan populasi manusia dan nyamuk terinfeksi, sedangkan sejumlah skenario pengendalian menghasilkan jumlah individu terinfeksi yang lebih rendah. Profil dua kontrol pada konfigurasi simulasi yang ditampilkan berada dekat batas atas selama sebagian besar periode. Temuan ini berlaku untuk asumsi dan parameter model yang digunakan; validasi lapangan masih diperlukan sebelum strategi diterapkan secara operasional.

Kata kunci: Kontrol optimal, Model penyebaran DBD, Prinsip minimum Pontryagin

MSC2020: 92D30, 49K15, 49M05

Abstract

Dengue hemorrhagic fever (DHF) remains a public health concern in Indonesia because its transmission involves interactions between humans and mosquito vectors. Controlling mosquito breeding can involve larvicide application and the 3M campaign, although the intensity of these interventions must be balanced against implementation costs. This study aims to determine optimal controls for a dengue transmission model consisting of six subpopulations: susceptible, infected, and recovered humans; aquatic-stage mosquitoes; and susceptible and infected adult mosquitoes. Two control variables represent larvicide application and the 3M campaign. The optimality system is formulated using Pontryagin's minimum principle through a Hamiltonian function, state equations, costate equations, and stationarity conditions. Numerical solutions are obtained using a forward-backward sweep procedure with the fourth-order Runge–Kutta method implemented in Python over a 365-day simulation horizon. The objective function penalizes aquatic mosquitoes and effort associated with both controls. In the uncontrolled scenario, simulated infected human and mosquito populations increase, whereas several controlled scenarios produce lower infected populations. Under the

**)* Corresponding Author

Diterima: 25-07-2025, Disetujui: 10-02-2026, Diterbitkan: 30-05-2026

illustrated parameter configuration, both numerical control profiles remain near their upper bounds for much of the simulation period. These findings describe model-based outcomes rather than verified intervention effectiveness; field calibration and validation remain necessary before operational recommendations can be made.

Keywords: Optimal control, Dengue transmission model, Pontryagin minimum principle

MSC2020: 92D30, 49K15, 49M05

Format sitasi: O. A. Ayu, B. Prihandono, dan N. Kusumastuti, "Kontrol Optimal Model Penyebaran Penyakit Demam Berdarah Dengue Menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin", KUBIK J. Publ. Ilm. Mat., Vol. 11, No. 1, pp. 37–50, 2026.

Pendahuluan

Demam Berdarah Dengue (DBD) termasuk jenis penyakit arbovirus yang ditularkan oleh dua jenis vektor nyamuk yaitu *Aedes aegypti* dan *Aedes albopictus* dan merupakan masalah utama penyakit di negara tropis [1]. Penyakit ini telah menyebar ke lebih dari 100 negara, termasuk Indonesia [2]. Indonesia memiliki iklim tropis dengan curah hujan yang tinggi, yang berpotensi menyebabkan berbagai penyakit tropis yang dapat disebabkan oleh nyamuk, salah satunya merupakan penyakit demam berdarah dengue [3]. Demam Berdarah ditandai dengan demam tinggi dan gejala pendarahan, yang dapat disebabkan oleh berbagai faktor seperti infeksi virus (dengue, Hantavirus, Ebola atau Marburg, Arenavirus), bakteri (Leptospirosis), atau gangguan pembekuan darah [4]. Demam berdarah mengacu pada berbagai faktor yang menyebabkan gejala ringan hingga sedang seperti demam tinggi, nyeri otot dan sendi, ruam kulit [5]. Sementara itu, DBD adalah penyakit menular yang ditularkan oleh virus *dengue* dari manusia yang terinfeksi ke nyamuk *Aedes aegypti* melalui gigitan. DBD adalah bentuk yang lebih parah dari infeksi dengue, yang ditandai dengan kebocoran plasma, trombositopenia (penurunan jumlah trombosit), dan pendarahan, yang jika tidak ditangani dapat berakibat fatal. DBD menjadi salah satu masalah kesehatan masyarakat yang signifikan di Indonesia.

Mengingat tingginya kasus demam berdarah dengue serta cepatnya tingkat penyebaran di Indonesia sehingga pengelola kesehatan memerlukan upaya pengendalian yang efektif terhadap penyakit ini. Salah satu langkah utama adalah mengurangi populasi nyamuk yang menjadi vektor penyebaran penyakit DBD. Ada beberapa cara pengendalian yang dapat dilakukan meliputi pemberian larvasida (abate), penyemprotan insektisida atau fogging, dan penerapan gerakan 3M [6]. Dari berbagai cara pengendalian, upaya paling utama adalah mengendalikan larva nyamuk [7]. Pengendalian larva dicapai dengan menggunakan pemberian larvasida seperti abate dan gerakan 3M. Namun efektivitas cara ini seringkali kurang optimal karena masyarakat tidak konsisten menerapkan langkah-langkah tersebut [8]. Oleh karena itu, penerapan teori kontrol optimal penting untuk merancang strategi pengendalian yang lebih efektif.

Aspek operasional pengendalian vektor juga perlu ditempatkan dalam konteks penelitian terdahulu. Pembahasan mengenai inovasi sanitasi lingkungan menekankan bahwa tindakan pengendalian tidak hanya berupa pemberian bahan kimia, tetapi juga mencakup pengelolaan habitat perkembangbiakan nyamuk [9]. Kajian tentang fogging dan pemberian abate [10], serta kegiatan pemberantasan sarang nyamuk melalui gerakan 3M Plus [11], memberikan latar penerapan tindakan

yang berbeda. Dalam penelitian ini, tindakan tersebut tidak dievaluasi melalui percobaan lapangan; larvasida dan 3M direpresentasikan sebagai dua variabel kontrol matematis pada fase akuatik. Perbedaan antara bentuk intervensi lapangan dan representasi matematisnya menjadi pertimbangan penting ketika menafsirkan hasil simulasi.

Beberapa penelitian sebelumnya telah mengembangkan model matematika untuk mengendalikan penyebaran DBD dengan pendekatan kontrol optimal. Dalam penelitian [12] menerapkan model kontrol optimal dengan strategi fumigasi untuk mengurangi jumlah individu yang terinfeksi. Dengan menggunakan prinsip minimum Pontryagin, penelitian ini menunjukkan bahwa strategi intervensi yang terjadwal dengan baik dapat menurunkan penyebaran DBD secara signifikan. Dalam penelitian lain oleh [13] mengembangkan model SIR dengan pendekatan vaksinasi sebagai strategi pengendalian utama. Hasil menunjukkan bahwa kombinasi vaksinasi dan pembasmian tempat perkembangbiakan nyamuk dapat secara efektif menekan penyebaran DBD.

Penelitian Abidemi dan Aziz [14] memformulasikan model transmisi dengue dengan strategi kontrol optimal berupa perlindungan individu, larvasida, dan insektisida untuk nyamuk dewasa. Sistem optimalitasnya disimulasikan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat melalui skema forward-backward sweep. Selanjutnya, Herdicho dkk. [15] mengembangkan model transmisi dengue dengan mempertimbangkan kesadaran masyarakat serta strategi pengendalian vektor, program peningkatan kesadaran, dan tindakan pencegahan. Kedua penelitian tersebut memberikan landasan bagi penggunaan teori kontrol optimal untuk pengendalian dengue dengan intervensi pada vektor dan masyarakat.

Perbedaan penelitian ini terletak pada pemilihan dua intervensi yang sama-sama berorientasi pada pengendalian perkembangbiakan vektor, yaitu pemberian larvasida (abate) melalui u_1 dan pelaksanaan gerakan 3M melalui u_2 , dalam model SIRASI dengan enam subpopulasi. Berbeda dengan Rohman dkk. [12] yang menelaah fumigasi impulsif, Chamnan dkk. [13] yang mengkaji vaksinasi, serta Abidemi dan Aziz [14] yang memasukkan perlindungan individu, larvasida, dan insektisida dewasa, penelitian ini memfokuskan perbandingan dua bentuk pencegahan pada fase akuatik. Herdicho dkk. [15] memasukkan unsur kesadaran masyarakat dan sejumlah intervensi pengendalian; sementara itu, model yang diteliti di sini secara khusus memadukan larvasida dan 3M. Dengan demikian, kontribusinya adalah penerapan dan analisis pasangan kontrol tersebut pada struktur model yang digunakan, bukan pengembangan prinsip minimum Pontryagin atau algoritma numerik yang baru. Tujuan analisis adalah menentukan strategi untuk menekan fase akuatik dengan mempertimbangkan biaya kontrol, kemudian mengamati konsekuensinya terhadap populasi manusia dan nyamuk yang terinfeksi melalui simulasi.

Metode

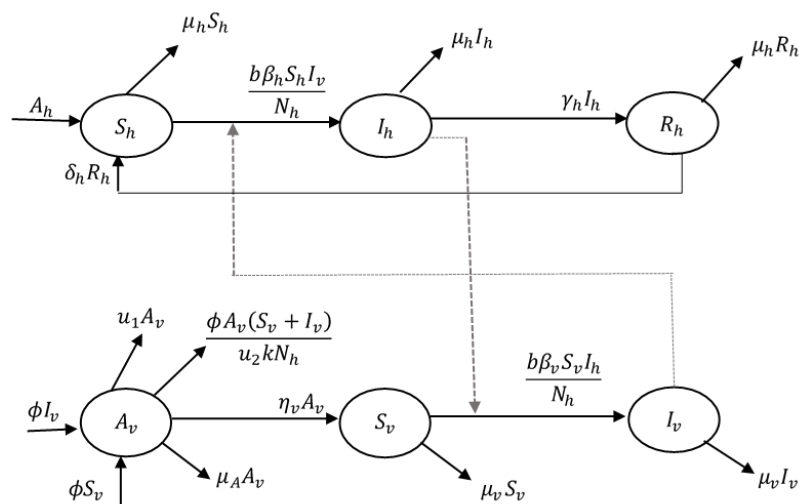
Sebuah model matematika dapat dibuat untuk demam berdarah dengue. Pada model ini, populasi manusia (N_h) dibagi menjadi tiga subpopulasi yaitu: subpopulasi *Susceptible Host* (S_h), subpopulasi *Infected Host* (I_h) dan subpopulasi *Recovered Host* (R_h). Selanjutnya, populasi nyamuk

dibagi menjadi tiga subpopulasi yaitu: subpopulasi *Aquatic phase* (A_v), subpopulasi *Susceptible Vector* (S_v), dan subpopulasi *Infected Vector* (I_v).

Penyusunan model menggunakan beberapa asumsi berikut [16], [17]:

1. Tidak ada migrasi pada populasi manusia maupun nyamuk.
2. Manusia dan nyamuk diasumsikan dalam keadaan rentan dan tidak ada perlindungan alami.
3. Angka kematian dianggap sebagai angka kematian alami di kedua populasi.
4. Tidak ada fase pulih pada nyamuk karena umurnya yang pendek.
5. Tidak ada efek kekebalan pada nyamuk dengan adanya pemberian larvasida (abate).

Berdasarkan asumsi-asumsi tersebut, diagram alir penyebaran penyakit DBD disajikan pada Gambar 1.



Gambar 1. Diagram Transfer Proses Penyebaran Penyakit DBD

Berdasarkan Gambar 1, model matematika dapat digambarkan dalam sistem persamaan diferensial biasa dengan pertumbuhan populasi manusia dan nyamuk pada setiap subpopulasi bergantung pada waktu. Oleh karena itu, sistem persamaan diferensial untuk model SIRASI DBD adalah

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS_h}{dt} &= A_h - \frac{b\beta_h S_h I_v}{N_h} - \mu_h S_h + \delta_h R_h \\ \frac{dI_h}{dt} &= \frac{b\beta_h I_v S_h}{N_h} - \gamma_h I_h - \mu_h I_h \\ \frac{dR_h}{dt} &= \gamma_h I_h - \mu_h R_h - \delta_h R_h \\ \frac{dA_v}{dt} &= \phi S_v + \phi I_v - \frac{\phi A_v S_v}{u_2 k N_h} - \frac{\phi A_v I_v}{u_2 k N_h} - u_1 A_v - \eta_v A_v - \mu_A A_v \\ \frac{dS_v}{dt} &= \eta_v A_v - \frac{b\beta_v S_v I_h}{N_h} - \mu_v S_v \\ \frac{dI_v}{dt} &= \frac{b\beta_v S_v I_h}{N_h} - \mu_v I_v \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Dengan

S_h : jumlah individu berpotensi terinfeksi virus dengue

I_h : jumlah individu yang terinfeksi demam berdarah dengue

R_h : jumlah individu yang telah pulih dari demam berdarah

A_v : fase yang mencakup tahap telur, larva dan pupa, yang hidup di dalam air

S_v : jumlah nyamuk yang berpotensi membawa virus dengue

I_v : jumlah nyamuk yang telah terinfeksi dengue oleh manusia yang terinfeksi
 N_h : jumlah populasi manusia
 A_h : angka kelahiran per kapita manusia
 b : rata-rata jumlah gigitan nyamuk pada manusia
 β_h : tingkat keberhasilan penularan dari nyamuk ke manusia
 μ_h : tingkat kematian manusia
 δ_h : laju perubahan dari individu yang telah pulih (R_h) kembali menjadi rentan (S_h)
 γ_h : tingkat pemulihan manusia
 ϕ : jumlah rata-rata telur yang dihasilkan oleh nyamuk betina
 k : rasio jumlah larva per manusia
 β_v : tingkat keberhasilan penularan dari manusia ke nyamuk
 η_v : tingkat transisi dari fase akuatik (A_v) ke nyamuk (S_v)
 μ_v : tingkat kematian nyamuk
 μ_A : tingkat kematian larva
 u_1 : tingkat efektivitas penggunaan larvasida (abate)
 u_2 : tingkat efektivitas gerakan 3M dalam mengurangi k

Selanjutnya, akan dijelaskan langkah demi langkah penyelesaian kontrol optimal dengan menggunakan prinsip minimum Pontryagin. Karena semua persamaan dalam model matematika ini merupakan bentuk persamaan diferensial sehingga akan dibuat fungsi objektif untuk model SIRASI pada $t \in [0, t_f]$. Kemudian, menggunakan persamaan diferensial dan fungsi objektif akan dibuat fungsi Hamiltonian. Dari bentuk umum fungsi Hamiltonian sebagai berikut [18]:

$$H(x(t), u(t), t) = V(x(t), u(t), t) + \lambda'(t)f(x(t), u(t), t) \quad (2)$$

Dimana $V(x(t), u(t), t)$ adalah integran dari fungsi objektif, $f(x(t), u(t), t)$ adalah sisi kanan dari persamaan diferensial sistem dinamik, dan $\lambda(t)$ adalah costate yang berhubungan dengan state $x(t)$. Setelah fungsi Hamiltonian, akan menyelesaikan persamaan state, persamaan costate, dan kondisi stasioner. Persamaan state akan merepresentasikan analisis jumlah populasi individu rentan (S_h), individu terinfeksi (I_h), individu sembuh (R_h), nyamuk pada fase akuatik (larva) (A_v), nyamuk rentan (S_v) dan nyamuk terinfeksi (I_v), persamaan costate digunakan untuk melengkapi kontrol yang didapatkan dari kondisi stasioner, dan kondisi stasioner untuk mendapatkan kontrol. Selanjutnya, setelah didapatkan kontrol, dilakukan simulasi numerik dengan menggunakan sweep maju mundur runge kutta orde 4 dengan berbagai nilai parameter [16].

Hasil dan Diskusi

Fungsi objektif pada Persamaan (3) disusun untuk meminimalkan jumlah nyamuk pada fase akuatik (A_v) selama periode pengamatan, sekaligus membatasi beban penerapan larvasida (u_1) dan gerakan 3M (u_2). Secara matematis, integran fungsi objektif memuat $C_1 A_v$, $\frac{C_2}{2} u_1^2$, dan $\frac{C_3}{2} u_2^2$. Oleh karena itu, fungsi objektif ini tidak secara langsung menghukum jumlah manusia terinfeksi (I_h) atau nyamuk terinfeksi (I_v). Penurunan I_h dan I_v merupakan keluaran epidemiologis tidak langsung yang dinilai melalui simulasi model, bukan variabel yang diminimalkan secara eksplisit oleh fungsi objektif berikut:

$$J(u_1, u_2) = \int_0^{t_f} \left[C_1 A_v + \frac{C_2}{2} u_1^2 + \frac{C_3}{2} u_2^2 \right] dt \quad (3)$$

Dengan C_1 adalah bobot yang berkaitan dengan biaya pengendalian populasi nyamuk pada fase akuatik (larva), C_2 adalah bobot yang berkaitan dengan biaya pemberian larvasida (abate), C_3 adalah bobot yang berkaitan dengan biaya Gerakan 3M dan t_f adalah waktu akhir. Selanjutnya, untuk mencari nilai optimal dari u_1 dan u_2 sehingga mendapatkan (u_1^*, u_2^*) maka sedemikian sehingga

$$J(u_1^*, u_2^*) = \min J((u_1, u_2) | (u_1, u_2) \in U)$$

Dengan

$$U = \{u_1, u_2 : 0 \leq u_1 \leq 1, 0 < u_2 \leq 1\}$$

Selanjutnya, penyelesaian kontrol optimal dapat diselesaikan dengan menggunakan prinsip minimum Pontryagin dengan langkah-langkah sebagai berikut:

- a. Membentuk fungsi Hamiltonian. Fungsi Hamiltonian didapatkan berdasarkan persamaan (2) yaitu dengan mensubstitusikan persamaan (3) dan persamaan (1) diperoleh

$$\begin{aligned} H(\dot{x}, u_1, u_2, t, \lambda) = & \left[C_1 A_v + \frac{C_2}{2} u_1^2 + \frac{C_3}{2} u_2^2 \right] + \lambda_1 \left[A_h - \frac{b\beta_h S_h I_v}{N_h} - \mu_h S_h + \delta_h R_h \right] + \\ & \lambda_2 \left[\frac{b\beta_h I_v S_h}{N_h} - \gamma_h I_h - \mu_h I_h \right] + \lambda_3 [\gamma_h I_h - \mu_h R_h - \delta_h R_h] + \\ & \lambda_4 \left[\phi S_v + \phi I_v - \frac{\phi A_v S_v}{u_2 k N_h} - \frac{\phi A_v I_v}{u_2 k N_h} - u_1 A_v - \eta_v A_v - \mu_A A_v \right] \\ & + \lambda_5 \left[\eta_v A_v - \frac{b\beta_v S_v I_h}{N_h} - \mu_v S_v \right] + \lambda_6 \left[\frac{b\beta_v S_v I_h}{N_h} - \mu_v I_v \right] \end{aligned} \quad (4)$$

- b. Menyelesaikan persamaan state. Menurut prinsip minimum Pontryagin, untuk persamaan state harus melakukan turunan parsial terhadap H dengan λ . Dari persamaan (4), diketahui $\lambda_i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ sehingga harus melakukan turunan terhadap H dari $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} &= \frac{dS_h}{dt} = A_h - \frac{b\beta_h S_h I_v}{N_h} - \mu_h S_h + \delta_h R_h \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} &= \frac{dI_h}{dt} = \frac{b\beta_h I_v S_h}{N_h} - \gamma_h I_h - \mu_h I_h \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda_3} &= \frac{dR_h}{dt} = \gamma_h I_h - \mu_h R_h - \delta_h R_h \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda_4} &= \frac{dA_v}{dt} = \phi S_v + \phi I_v - \frac{\phi A_v S_v}{u_2 k N_h} - \frac{\phi A_v I_v}{u_2 k N_h} - u_1 A_v - \eta_v A_v - \mu_A A_v \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda_5} &= \frac{dS_v}{dt} = \eta_v A_v - \frac{b\beta_v S_v I_h}{N_h} - \mu_v S_v \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda_6} &= \frac{dI_v}{dt} = \frac{b\beta_v S_v I_h}{N_h} - \mu_v I_v \end{aligned}$$

- c. Menyelesaikan persamaan costate. Menurut prinsip minimum Pontryagin, untuk persamaan costate harus melakukan turunan parsial terhadap H dengan x . Dari persamaan (4), diketahui $\lambda_i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ sehingga harus melakukan turunan terhadap H dengan x dari $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$ yang memenuhi

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial S_h} = -\frac{I_v b\beta_h \lambda_2}{N_h} - \lambda_1 \left(-\frac{I_v b\beta_h}{N_h} - \mu_h \right) \\ \frac{d\lambda_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial I_h} = -\gamma_h \lambda_3 - \lambda_2 (-\gamma_h - \mu_h) + \frac{S_v b\beta_v \lambda_5}{N_h} - \frac{S_v b\beta_v \lambda_6}{N_h} \\ \frac{d\lambda_3}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial R_h} = -\delta_h \lambda_1 - \lambda_3 (-\delta_h - \mu_h) \\ \frac{d\lambda_4}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial A_v} = -\eta_v \lambda_5 - \lambda_4 \left(-\frac{\phi S_v}{u_2 k N_h} - \frac{\phi I_v}{u_2 k N_h} - \eta_v - \mu_A - u_1 \right) - C_1 \\ \frac{d\lambda_5}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial S_v} = -\frac{I_h b\beta_v \lambda_6}{N_h} - \lambda_4 \phi \left(-\frac{A_v}{u_2 k N_h} + 1 \right) - \lambda_5 \left(-\frac{I_h b\beta_v}{N_h} - \mu_v \right) \\ \frac{d\lambda_6}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial I_v} = -\lambda_4 \phi \left(-\frac{A_v}{u_2 k N_h} + 1 \right) + \lambda_6 \mu_v + \frac{S_h b\beta_h \lambda_1}{N_h} - \frac{S_h b\beta_h \lambda_2}{N_h} \end{aligned}$$

- d. Menentukan kondisi stasioner. Menurut prinsip minimum Pontryagin, harus melakukan turunan parsial terhadap H dengan u untuk mendapatkan kontrol u^* sehingga dari persamaan (4), kontrol didapatkan dari $\frac{\partial H}{\partial u_i} = 0$ untuk $i = 1, 2$

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = C_2 u_1 - \lambda_4 A_v$$

$$u_1 = \frac{\lambda_4 A_v}{C_2}$$

dan

$$\frac{\partial H}{\partial u_2} = C_3 u_2 + \lambda_4 \left(\frac{\phi A_v S_v}{k N_h u_2^2} + \frac{\phi I_v A_v}{k N_h u_2^2} \right)$$

$$u_2 = \sqrt[3]{-\frac{\lambda_4 \phi A_v (S_v + I_v)}{C_3 k N_h}}$$

Karena nilai kontrolnya terbatas, dimana $0 \leq u_1 \leq 1, 0 < u_2 \leq 1$ sehingga bentuk kontrol yang optimal adalah

$$u_1^* = \min \left\{ 1; \max \left\{ 0; \frac{\lambda_4 A_v}{C_2} \right\} \right\}$$

$$u_2^* = \min \left\{ 1; \max \left\{ 0, 1; \sqrt[3]{-\frac{\lambda_4 \phi A_v (S_v + I_v)}{C_3 k N_h}} \right\} \right\}$$

Simulasi Numerik

Simulasi numerik menggunakan metode sweep maju-mundur dengan integrasi Runge–Kutta orde empat (RK4). Mula-mula, tebakan awal untuk kontrol $u_1(t)$ dan $u_2(t)$ ditentukan pada interval 0–365 hari. Persamaan state kemudian diintegrasikan maju dari $t = 0$ menggunakan kondisi awal, sedangkan persamaan costate diintegrasikan mundur dari $t = 365$ dengan menggunakan kondisi terminal yang berlaku. Selanjutnya, lintasan kontrol diperbarui melalui kondisi stasioner dan batas kontrol, dan proses tersebut diulangi untuk memperoleh lintasan numerik yang stabil. Parameter epidemiologi mengikuti Tabel 1 dengan nilai awal sebagai berikut [16]: $(S_h(0), I_h(0), R_h(0), A_v(0), S_v(0), I_v(0)) = (980, 20, 0, 2000, 980, 20)$

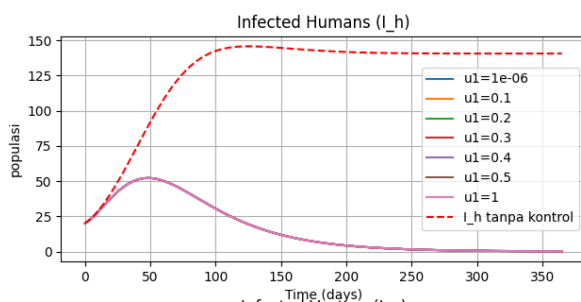
Pemakaian skema numerik perlu dibaca sebagai pendekatan untuk memecahkan sistem optimalitas yang saling bergantung. Penggunaan kontrol optimal pada model transmisi dengue telah menjadi dasar kajian sebelumnya [19], sedangkan strategi nyamuk steril menggambarkan alternatif pengendalian yang berbeda dari pendekatan larvasida dan 3M pada penelitian ini [20]. Kedua rujukan tersebut digunakan sebagai konteks perbandingan model, bukan sebagai data numerik baru. Agar simulasi dapat direproduksi, implementasi perlu mendokumentasikan tebakan awal kontrol, ukuran langkah waktu, toleransi penghentian iterasi, dan pemeriksaan konsistensi antara lintasan keadaan dan pendamping. Parameter atau prosedur yang tidak tercantum secara eksplisit dalam naskah tidak ditetapkan secara baru pada revisi ini.

Tabel 1. Nilai parameter yang digunakan dalam simulasi numerik

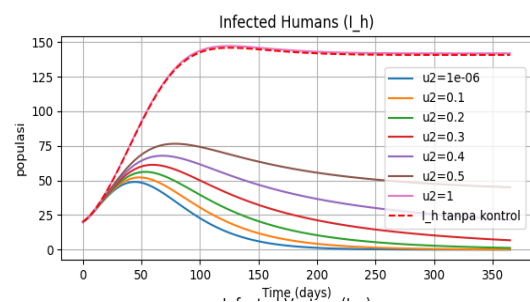
Parameter	Nilai	Deskripsi
N_h	1000	Jumlah populasi manusia diasumsikan sebanyak 1000 orang
A_h	$1000/(65 \times 365)$	karena dalam model total populasi konstan sehingga $A_h = N_h \mu_h$

Tabel 1. Nilai parameter yang digunakan dalam simulasi numerik		
b	1	Nyamuk hanya menggigit sekali dalam sehari [17]
β_h, β_v	0,1	Diasumsikan bahwa diperlukan 10 kontak yang berhasil untuk menginfeksi manusia/nyamuk dengan dengue [17]
μ_h	$1/(65 \times 365)$	Karena harapan hidup manusia adalah sekitar 65 tahun [17]
δ_h	$1/30$	Kekebalan jangka pendek manusia terhadap DBD setelah pemulihan adalah 30 hari [17]
γ_h	$1/14$	Tingkat pemulihan alami untuk populasi manusia dari DBD adalah 14 hari [18]
ϕ	300	Diasumsikan bahwa setiap nyamuk <i>Aedes Aegypti</i> betina menghasilkan 300 telur setiap kali bertelur
k	2	Diasumsikan bahwa rasio antara manusia dan nyamuk dewasa adalah 2
η_v	0,25/21	Transisi dari fase akuatik menjadi nyamuk dewasa [18]
μ_v	$1/30$	Harapan hidup populasi nyamuk adalah 30 hari [18]
μ_A	0,75/21	Diasumsikan bahwa hanya ada 25% kemungkinan jentik akan tumbuh dan menjadi nyamuk dewasa dengan waktu transisi selama 21 hari

Berdasarkan nilai awal dan parameter pada Tabel 1, simulasi dilakukan selama 365 hari. Gambar 2 dan Gambar 4 menampilkan variasi intensitas kontrol larvasida (u_1), berturut-turut terhadap populasi manusia dan nyamuk yang terinfeksi. Gambar 3 dan Gambar 5 menampilkan variasi intensitas gerakan 3M (u_2) untuk kedua populasi tersebut. Garis merah putus-putus pada keempat gambar menunjukkan skenario tanpa kontrol. Legenda menampilkan nilai intensitas $10^{-6}, 0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5$, dan 1. Grafik variasi intensitas ini dibedakan dari profil kontrol hasil optimasi pada Gambar 6.



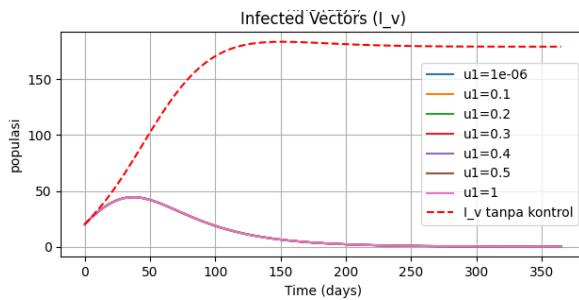
Gambar 2. Dinamika manusia terinfeksi (I_h): variasi intensitas larvasida (u_1) dan tanpa kontrol



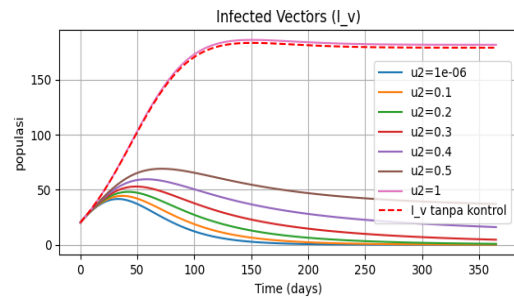
Gambar 3. Dinamika manusia terinfeksi (I_h): variasi intensitas gerakan 3M (u_2) dan tanpa kontrol

Gambar 2 menunjukkan dinamika I_h ketika intensitas larvasida u_1 divariasikan, sedangkan Gambar 3 menunjukkan dinamika I_h ketika intensitas gerakan 3M u_2 divariasikan. Dalam skenario tanpa kontrol, I_h meningkat dari sekitar 20 orang menuju puncak sekitar 145 orang, lalu bertahan relatif tinggi hingga akhir periode. Pada Gambar 2, beberapa kurva variasi u_1 tampak hampir berimpit

dan lebih rendah daripada kurva tanpa kontrol; oleh sebab itu grafik tersebut belum cukup untuk membandingkan kekuatan pengaruh antarintensitas u_1 . Pada Gambar 3, nilai u_2 yang berbeda menghasilkan kurva yang lebih bervariasi, tetapi penurunan infeksi tidak menunjukkan pola monoton terhadap kenaikan u_2 . Temuan ini merupakan gambaran keluaran simulasi berdasarkan nilai parameter yang dipakai; identifikasi skenario, penerapan variabel kontrol dalam program, dan perbandingan antarstrategi masih perlu diperiksa sebelum menyimpulkan kontrol mana yang paling efektif.

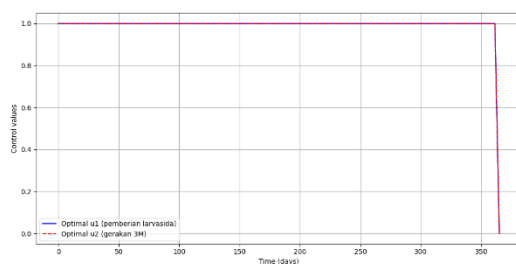


Gambar 4. Dinamika nyamuk terinfeksi (I_v): variasi intensitas larvasida (u_1) dan tanpa kontrol

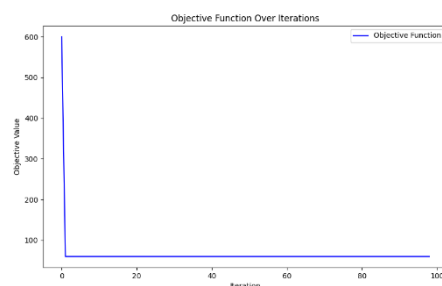


Gambar 5. Dinamika nyamuk terinfeksi (I_v): variasi intensitas gerakan 3M (u_2) dan tanpa kontrol

Gambar 4 dan Gambar 5 memperlihatkan populasi nyamuk terinfeksi I_v selama 365 hari. Gambar 4 membandingkan variasi intensitas pemberian larvasida u_1 , sedangkan Gambar 5 membandingkan variasi intensitas gerakan 3M u_2 . Pada kurva tanpa kontrol, populasi nyamuk terinfeksi meningkat hingga sekitar 180 individu dan tetap tinggi hingga akhir simulasi. Kurva-kurva pada skenario variasi u_1 di Gambar 4 tampak saling berimpit; sementara itu, variasi u_2 pada Gambar 5 memperlihatkan perbedaan lintasan yang lebih jelas, tetapi tidak memperlihatkan kecenderungan penurunan yang konsisten ketika u_2 dinaikkan. Karena nilai kontrol pembanding yang dipertahankan belum dijelaskan, grafik-grafik ini tidak dapat dijadikan dasar tunggal untuk menyatakan bahwa larvasida lebih unggul daripada 3M atau sebaliknya.



Gambar 6. Kontrol u_1 dan u_2



Gambar 7. Fungsi objektif

Gambar 6 memperlihatkan profil numerik dua kontrol hasil iterasi, yaitu $u_1(t)$ untuk larvasida dan $u_2(t)$ untuk gerakan 3M. Dalam konfigurasi simulasi yang ditampilkan, kedua kontrol hampir berimpit pada intensitas sekitar 1 sampai mendekati hari ke-361 dan menurun pada akhir horizon waktu. Profil tersebut merupakan hasil perhitungan untuk model, nilai awal, fungsi objektif, serta bobot biaya yang digunakan; grafik tidak dengan sendirinya membuktikan bahwa intensitas maksimum diperlukan dalam semua kondisi epidemiologis. Penurunan menjelang akhir horizon berkaitan dengan solusi

numerik pada batas waktu yang ditetapkan dan tidak dapat langsung ditafsirkan sebagai izin mengurangi intervensi setelah epidemi terkendali.

Gambar 7 memperlihatkan perubahan nilai fungsi objektif terhadap iterasi algoritma. Nilainya berkurang tajam dari sekitar 600 menuju kisaran 60 pada iterasi awal, kemudian tampak relatif stabil pada iterasi berikutnya. Penurunan ini menggambarkan perbaikan nilai fungsi objektif pada konfigurasi perhitungan yang ditampilkan. Namun, kurva tersebut belum cukup untuk membuktikan tercapainya minimum global ataupun menunjukkan bahwa lintasan kontrol akan memiliki bentuk yang sama untuk semua pilihan parameter.

Interpretasi Mekanisme Pengendalian pada Model Enam Subpopulasi

Kedua bentuk intervensi yang dikaji pada model memiliki sasaran langsung yang berdekatan, tetapi mekanisme pelaksanaannya berbeda. Larvasida diarahkan pada tahap perkembangan nyamuk di lingkungan perairan, sedangkan gerakan 3M berorientasi pada pengurangan atau pengelolaan tempat yang memungkinkan perkembangbiakan vektor. Dalam formulasi enam subpopulasi, kedua kontrol berkaitan dengan dinamika fase akuatik, lalu pengaruhnya diteruskan melalui perpindahan individu menuju kelompok nyamuk dewasa. Karena infeksi pada manusia berlangsung melalui interaksi dengan nyamuk terinfeksi, perubahan fase akuatik dapat memengaruhi jumlah manusia terinfeksi secara tidak langsung. Rangkaian hubungan tersebut menjelaskan mengapa penurunan populasi manusia terinfeksi dapat muncul pada simulasi meskipun variabel manusia terinfeksi tidak diukur secara langsung dalam fungsi objektif.

Namun, hubungan sebab akibat dalam model tidak berarti bahwa setiap kenaikan intensitas intervensi selalu akan diikuti oleh penurunan infeksi yang sama besar pada semua waktu. Besarnya pengaruh dapat dipengaruhi keadaan awal, proporsi nyamuk yang sudah memasuki fase dewasa, laju gigitan, kecepatan perpindahan dari fase akuatik, serta interaksi parameter lainnya. Oleh karena itu, variasi lintasan pada Gambar 2–5 harus ditafsirkan sebagai keluaran sistem dinamik untuk suatu himpunan nilai parameter, bukan sebagai hubungan dosis-respons yang telah dibuktikan melalui pengamatan lapangan. Sebagai ilustrasi, ketika banyak nyamuk dewasa telah berada dalam populasi, intervensi yang berfokus pada fase akuatik tidak serta-merta menghilangkan infeksi pada saat yang sama. Efeknya baru dapat diamati melalui perubahan stok nyamuk pada periode berikutnya.

Grafik skenario pada Gambar 2 dan Gambar 4 menunjukkan lintasan pengendalian yang hampir berimpit. Kemiripan bentuk tersebut belum tentu menyatakan bahwa seluruh intensitas larvasida menghasilkan efektivitas yang identik. Kemungkinan lain yang perlu ditelaah ialah skala sumbu grafik, sensitivitas persamaan terhadap parameter kontrol, atau cara nilai kontrol dimasukkan ke dalam program. Pada Gambar 3 dan Gambar 5, lintasan variasi gerakan 3M tampak lebih terpisah, tetapi pola tersebut belum cukup untuk menyusun pemeringkatan intervensi. Perbandingan yang adil mensyaratkan kondisi awal dan parameter epidemiologi yang sama, serta keterangan mengenai apakah kontrol pasangan dipertahankan tetap atau dioptimalkan kembali. Dalam revisi ini, ketidakpastian tersebut dijelaskan secara terbuka agar kesimpulan tidak melampaui informasi yang tersedia.

Keseimbangan Fungsi Objektif, Intensitas Kontrol, dan Hasil Simulasi

Fungsi objektif yang disusun pada penelitian ini menggabungkan upaya menekan populasi nyamuk fase akuatik dengan penalti penggunaan larvasida dan gerakan 3M. Dengan demikian, tujuan matematis pengendalian bukan semata-mata mencari intervensi terkuat dalam setiap saat, melainkan menemukan lintasan kontrol yang memenuhi struktur model, batas intensitas, dan bobot biaya yang ditetapkan. Interpretasi tersebut penting karena kontrol yang tinggi sepanjang periode tertentu dapat

dipandang menguntungkan pada komponen pengurangan populasi vektor, tetapi sekaligus meningkatkan komponen biaya pengendalian. Prinsip minimum Pontryagin memungkinkan kedua pertimbangan tersebut dirumuskan melalui fungsi Hamiltonian dan kondisi stasioner, dengan persamaan pendamping yang merepresentasikan pengaruh perubahan keadaan terhadap tujuan optimasi.

Pada Gambar 6, kedua lintasan kontrol hasil simulasi tampak mendekati nilai maksimum hingga menjelang akhir horizon waktu. Hasil ini dapat dijelaskan dalam kerangka solusi numerik dengan batas kontrol: selama manfaat marginal pengurangan komponen sasaran masih lebih besar menurut bobot fungsi objektif, solusi dapat berada dekat batas atas. Meskipun demikian, profil tersebut belum dapat digeneralisasi menjadi anjuran intervensi maksimal untuk setiap wilayah dan waktu. Bobot biaya kontrol, keadaan awal vektor, serta panjang periode pengamatan dapat menggeser keseimbangan antara penurunan fase akuatik dan intensitas tindakan. Karena angka bobot biaya yang digunakan belum dijelaskan secara memadai dalam paparan hasil, interpretasi tentang efisiensi ekonomi atau biaya paling rendah belum dapat ditarik dari grafik saja.

Penurunan lintasan kontrol mendekati waktu akhir pada Gambar 6 juga perlu dibedakan dari fenomena epidemiologis. Dalam persoalan kontrol optimal dengan horizon waktu tetap, nilai kontrol pada ujung periode dipengaruhi oleh kondisi terminal untuk variabel pendamping dan keberadaan atau ketiadaan biaya terminal pada fungsi objektif. Oleh sebab itu, turunnya kontrol pada hari-hari terakhir tidak otomatis berarti nyamuk telah hilang atau pengendalian dapat dihentikan dengan aman setelah periode simulasi. Untuk tujuan kebijakan, pengamatan lintasan setelah horizon dan pemeriksaan risiko peningkatan kembali populasi vektor diperlukan. Naskah ini tidak menyajikan analisis lanjutan tersebut, sehingga penjelasan hanya dibatasi pada makna matematis dan numerik dari hasil yang tersedia.

Evaluasi Konsistensi Numerik dan Reproduksiabilitas

Algoritma sweep maju-mundur menyelesaikan dua masalah nilai batas yang saling terhubung. Persamaan keadaan memerlukan kondisi awal dan dijalankan maju sepanjang waktu, sedangkan persamaan pendamping memerlukan kondisi terminal dan diintegrasikan mundur. Nilai kontrol kemudian diperbarui berdasarkan bentuk stasioner yang telah dibatasi agar tetap berada dalam himpunan kendala. Proses berulang tersebut dianggap stabil ketika perubahan lintasan antariterasi telah cukup kecil menurut kriteria penghentian yang dipilih. Walaupun pendekatan ini lazim dalam kontrol optimal epidemik, keberhasilan simulasi membutuhkan pemeriksaan teknis atas pemilihan langkah waktu dan konsistensi pembaruan kontrol; penggunaan Runge–Kutta orde empat saja tidak menjamin hasil optimum global.

Gambar 7 menunjukkan bahwa nilai fungsi objektif berkurang pada iterasi awal lalu mendekati nilai yang relatif tetap. Pola ini merupakan petunjuk konvergensi numerik untuk eksperimen yang ditampilkan, tetapi hasil tersebut belum dapat digunakan sebagai bukti bahwa solusi telah mencapai optimum global. Pemeriksaan reproduksiabilitas yang dapat dilakukan pada penelitian lanjutan meliputi pelaporan ukuran langkah waktu, toleransi numerik, jumlah iterasi, lintasan tebakan awal yang dibandingkan, dan nilai fungsi objektif akhir. Pengujian kembali dengan langkah waktu yang lebih kecil dapat membantu menilai apakah hasil dipengaruhi diskretisasi. Informasi tersebut sebaiknya berasal dari kode dan keluaran simulasi penulis, bukan diperkirakan melalui bentuk grafik, sehingga tidak ada nilai baru yang dinyatakan seolah telah diuji dalam naskah ini.

Keterbatasan Model dan Arah Pengembangan

Model enam subpopulasi menyederhanakan proses biologis dan sosial yang kompleks. Asumsi tidak adanya migrasi, bentuk kontak penularan, tidak adanya fase pulih pada nyamuk, dan pemakaian parameter tertentu diperlukan agar sistem dapat dirumuskan dan dihitung, tetapi masing-masing dapat membatasi penerapan hasil pada kondisi nyata. Penyebaran DBD juga dipengaruhi heterogenitas kepadatan penduduk, karakteristik lokasi penampungan air, perilaku masyarakat, pergantian musim, dan dinamika vektor. Faktor tersebut belum seluruhnya dimasukkan secara eksplisit. Karena itu, pola yang diperoleh pada simulasi 365 hari lebih tepat dinyatakan sebagai analisis skenario model dibanding prediksi jumlah kasus pada wilayah tertentu.

Implikasi penelitian ini terutama terletak pada cara menyusun kerangka evaluasi intervensi yang dapat dibandingkan secara matematis. Larvasida dan gerakan 3M adalah tindakan yang berbeda dalam sumber daya, pola pelaksanaan, dan tingkat ketergantungan pada perilaku masyarakat. Penerapan praktis perlu mempertimbangkan keselamatan penggunaan bahan pengendali, kepatuhan program, keberlanjutan pembersihan tempat perkembangbiakan, serta ketersediaan fasilitas kesehatan dan pengawasan lingkungan. Keluaran kontrol berupa bilangan antara batas bawah dan batas atas belum dapat langsung diterjemahkan menjadi dosis bahan atau frekuensi kegiatan tanpa persamaan penghubung yang jelas. Oleh sebab itu, hasil penelitian sebaiknya dimanfaatkan sebagai dasar penyusunan hipotesis dan desain evaluasi kebijakan, bukan sebagai ketentuan operasional siap pakai.

Kesimpulan

Penelitian ini menerapkan prinsip minimum Pontryagin pada model penyebaran DBD dengan enam subpopulasi dan dua intervensi, yaitu larvasida (u_1) dan gerakan 3M (u_2). Fungsi objektif menyeimbangkan pengurangan populasi nyamuk fase akuatik dengan intensitas penerapan kedua kontrol. Perubahan jumlah manusia terinfeksi (I_h) dan nyamuk terinfeksi (I_v) dievaluasi melalui simulasi sebagai akibat tidak langsung dari pengendalian fase akuatik. Berdasarkan kondisi stasioner dan pembatasan intensitas intervensi, bentuk kontrol optimal diperoleh sebagai berikut:

$$u_1^* = \min \left\{ 1; \max \left\{ 0; \frac{\lambda_4 A_v}{C_2} \right\} \right\}$$

$$u_2^* = \min \left\{ 1; \max \left\{ 0, 1; \sqrt[3]{-\frac{\lambda_4 \phi A_v (S_v + I_v)}{C_3 k N_h}} \right\} \right\}$$

Hasil simulasi menunjukkan bahwa tanpa kontrol terjadi peningkatan populasi manusia dan nyamuk terinfeksi, sedangkan beberapa skenario intervensi menghasilkan jumlah populasi terinfeksi yang lebih rendah. Gambar 2–5 memperlihatkan pengaruh variasi masing-masing kontrol pada keluaran model, sedangkan Gambar 6–7 memperlihatkan profil kontrol dan perubahan fungsi objektif dari perhitungan optimalitas. Hasil ini berlaku pada asumsi dan parameter simulasi yang digunakan dan belum merupakan bukti efektivitas intervensi pada populasi nyata. Pengembangan lebih lanjut dapat mencakup validasi dengan data lapangan, evaluasi pengaruh musim, serta penambahan strategi pengendalian lain.

Penelitian ini dapat dikembangkan lebih lanjut dengan menambahkan strategi fogging sebagai variabel kontrol dan model dapat diperluas dengan mempertimbangkan faktor musiman seperti curah hujan dan suhu.

Referensi

- [1] N. Frida, *Mengenal Demam Berdarah Dengue*. Alprin, 2020.
- [2] World Health Organization, "Dengue guidelines for diagnosis, treatment, prevention and control: New edition," Rep. WHO/HTM/NTD/DEN/2009.1, 2009. [Online]. Available: <https://iris.who.int/handle/10665/44188>
- [3] A. Faozi, A. Faozi, P. Haryeti, and A. P. Hudaya, "Penyuluhan pemberantasan sarang nyamuk dalam upaya pencegahan penyakit demam berdarah di Desa Citimun Kecamatan Cimalaka Kabupaten Sumedang," *J. Kreat. Pengabd. Kpd. Masy. (PKM)*, vol. 6, no. 3, pp. 1167–1175, 2023.
- [4] G. L. Mandell, J. E. Bennett, and R. Dolin, *Mandell, Douglas, and Bennett's Principles and Practice of Infectious Diseases*, 7th ed. Philadelphia: Churchill Livingstone Elsevier, 2010.
- [5] M. Jannah, "Model matematika SEIRS-SEI pada penyebaran penyakit demam berdarah dengue dengan pengaruh suhu," *MAp Math. Appl. J.*, vol. 2, no. 2, pp. 66–78, 2020.
- [6] A. Dinata, *Bersahabat dengan Nyamuk: Jurus Jitu Atasi Penyakit Bersumber Nyamuk*. Arda Publishing House, 2018.
- [7] N. Siyam et al., "Penerapan pencegahan dan pengendalian demam berdarah dengue berbasis ecohealth di Kota Semarang," *Bookchapter Kesehat. Masy. Univ. Negeri Semarang*, no. 4, pp. 1–26, 2023, doi: 10.15294/km.v1i4.118.
- [8] N. Siyam et al., "Intervensi dan hambatan pencegahan dan pengendalian demam berdarah dengue," *Bookchapter Kesehat. Masy. Univ. Negeri Semarang*, no. 1, pp. 28–58, 2022, doi: 10.15294/km.v1i1.68.
- [9] N. Haidah, Juherah, Sulasmi, K. P. Kasim, and Haerani, *Pengendalian Vektor Melalui Inovasi dan Rekayasa Sanitasi*. Nas Media Pustaka, 2024.
- [10] M. T. Hidayat, D. S. Pradana, M. F. Rozy, and I. D. Setyaji, "Strategi efektif dalam pengendalian nyamuk, fogging dan pemberian obat Abate," *J. Pengabd. Indones.*, vol. 1, no. 2, pp. 8–13, 2024, doi: 10.47134/jpi.v1i2.3003.
- [11] R. Pramudita, W. Waluyo, Y. Aprilianti, D. Darmawan, F. P. Salsabila, and M. Sahrul, "Pencegahan demam berdarah dengan gerakan pemberantasan sarang nyamuk (PSN) melalui 3M Plus," in *Prosiding Seminar Nasional LPPM UMJ*, 2024. [Online]. Available: <https://jurnal.umj.ac.id/index.php/semnaskat/article/download/25303/11554>
- [12] M. I. S. Rohman, B. D. Handari, and D. Aldila, "An impulse fumigation scenario to control dengue spreads," in *AIP Conference Proceedings*, vol. 2023, Art. no. 020213, 2018, doi: 10.1063/1.5064210.
- [13] A. Chamnan, P. Pongsumpun, I.-M. Tang, and N. Wongvanich, "Optimal control of dengue transmission with vaccination," *Mathematics*, vol. 9, no. 15, Art. no. 1833, 2021, doi: 10.3390/math9151833.
- [14] A. Abidemi and N. A. B. Aziz, "Optimal control strategies for dengue fever spread in Johor, Malaysia," *Comput. Methods Programs Biomed.*, vol. 196, Art. no. 105585, 2020, doi: 10.1016/j.cmpb.2020.105585.

- [15] F. F. Herdicho et al., "Modeling the dynamics of dengue transmission with awareness and optimal control analysis," PLOS ONE, vol. 20, no. 5, Art. no. e0322702, 2025, doi: 10.1371/journal.pone.0322702.
- [16] A. Bustamam, D. Aldila, and A. Yuwanda, "Understanding dengue control for short- and long-term intervention with a mathematical model approach," J. Appl. Math., vol. 2018, pp. 1–13, 2018, doi: 10.1155/2018/9674138.
- [17] H. Purwanto, E. Noviani, and M. N. Mara, "Analisis dan simulasi model matematika penyakit demam dengue dengan satu serotif virus dengue," Bimaster Bul. Ilm. Mat. Stat. dan Ter., vol. 3, no. 3, pp. 153–162, 2014, doi: 10.26418/bbimst.v3i03.7349.
- [18] D. S. Naidu, Optimal Control Systems. Boca Raton, FL: CRC Press, 2003.
- [19] D. Aldila, T. Götz, and E. Soewono, "An optimal control problem arising from a dengue disease transmission model," Math. Biosci., vol. 242, no. 1, pp. 9–16, 2013, doi: 10.1016/j.mbs.2012.11.014.
- [20] D. Aldila, N. Nuraini, and E. Soewono, "Mathematical model in controlling dengue transmission with sterile mosquito strategies," in AIP Conference Proceedings, vol. 1677, Art. no. 030002, 2015, doi: 10.1063/1.4930624.