

## Rank dari Matriks yang Ajaib Secara Diagonal

Siti Nurjanah<sup>1,a)</sup>, Melani Yana Putri<sup>1,b)</sup> Fadilah Ilahi<sup>1,c)</sup>

<sup>1</sup>Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sunan Gunung Djati Bandung, Indonesia

<sup>a)</sup>email: [sitinurjanah4795@gmail.com](mailto:sitinurjanah4795@gmail.com)

<sup>b)</sup>email: [melaniyputri@gmail.com](mailto:melaniyputri@gmail.com)

<sup>c)</sup>email: [fadilah.ilahi@uinsgd.ac.id](mailto:fadilah.ilahi@uinsgd.ac.id)

### Abstrak

Matriks yang ajaib secara diagonal adalah suatu matriks  $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  yang memenuhi  $\sum_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} = \sum_{i=1}^n a_{i,\pi(i)}$  untuk semua  $\sigma, \pi \in S_n$ . Dalam jurnal ini akan ditunjukkan bagaimana mengkonstruksi matriks yang ajaib secara diagonal dengan mengambil sebarang  $a_{i,n}, a_{n,j}$  untuk  $2 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n - 1$  adalah variabel bebas. Di sini juga akan dikaji bahwa matriks yang ajaib secara diagonal  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  memiliki  $\text{rank}(A) \leq 2$ .

*Kata kunci: transversal, matriks yang ajaib secara diagonal, rank matriks*

### Abstract

Diagonally magic matrix is a matrix  $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  which fill  $\sum_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} = \sum_{i=1}^n a_{i,\pi(i)}$  for all  $\sigma, \pi \in S_n$ . In this paper, it will be showed how to construct diagonally magic matrices by taking randomly  $a_{i,n}, a_{n,j}$  for  $2 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n - 1$  are free variables. Here, it will be discussed that diagonally magic matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  has  $\text{rank}(A) \leq 2$ .

*Keywords: transversal, diagonally magic matrices, rank matrix*

### Pendahuluan

Didalam matematika matriks menjadi salah satu bahasan yang penting, yang mana matriks merupakan salah satu cabang dalam Aljabar Linear. Secara umum dapat didefinisikan bahwa matriks adalah kumpulan bilangan-bilangan yang disusun secara khusus dalam bentuk baris dan kolom sehingga membentuk persegi panjang atau bujur sangkar yang ditulis di antara tanda kurung, yaitu ( ) atau [ ] [2].

Ada jenis-jenis matriks seperti, matriks bujur sangkar, matriks nol, matriks satu, matriks identitas, matriks positif, matriks transpose, matriks diagonal, dan lain-lain. Selain itu ada juga matriks yang ajaib secara diagonal.

Suatu matriks termasuk matriks yang ajaib secara diagonal dapat ditentukan rank dari matriks tersebut. Rank dari suatu matriks merupakan jumlah maksimum dari vektor baris atau vektor kolom yang bebas linier. Rank matriks digunakan untuk menentukan apakah sesuatu matriks singular atau nonsingular[1].

Berdasarkan pemahaman di atas penulis memandang perlu untuk mengkaji lebih lanjut mengenai bagaimana cara mengkonstruksi matriks yang ajaib secara diagonal dan dipandang perlu mengkaji rank dari matriks yang ajaib secara diagonal.

**Definisi 1** [3] Untuk bilangan bulat positif  $n$ , misalkan  $S_n$  adalah himpunan dari semua  $n!$  permutasi  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Jika  $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  dan  $\sigma \in S_n$ , maka barisan

$$a_{1,\sigma(1)}, a_{2,\sigma(2)}, \dots, a_{n,\sigma(n)} \tag{1}$$

disebut transversal dari  $A$ .

**Definisi 2** [4] Suatu matriks  $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  disebut matriks yang ajaib secara diagonal jika

$$\sum_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} = \sum_{i=1}^n a_{i,\pi(i)} \tag{2}$$

untuk semua  $\sigma, \pi \in S_n$ .

Matriks nol  $O = 0_{n \times n}$  dan matriks satu  $J = [1]_{n \times n}$  adalah matriks yang ajaib secara diagonal. Selain itu, kedua matriks di bawah ini yaitu

$$B_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & (n-1)n+3 & \dots & n^2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

dan

$$C_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

adalah matriks yang ajaib secara diagonal.

**Definisi 3** [4] Untuk matriks  $D = (d_{i,j}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , maka vektor-vektor kolom dari matriks  $D$  adalah  $d_1, d_2, \dots, d_n$ .  $\text{vec}(D)$  adalah suatu vektor kolom dari matriks  $D$  yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\text{vec}(D) = (d_1^T, d_2^T, \dots, d_n^T)^T$$

dengan  $^T$  menunjukkan transpose dari matriks tersebut.

**Definisi 4** [4] Matriks  $E_{i,j}^n$  merupakan matriks identitas  $I_n$  ukuran  $n$  yang elemen  $i, i$  dan  $j, j$  diganti oleh 0 dan elemen  $i, j$  dan  $j, i$  diganti oleh 1.

**Kontruksi Matriks yang Ajaib Secara Diagonal**

Misalkan  $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  adalah matriks yang ajaib secara diagonal dengan  $n \geq 2$ . Asumsikan bahwa jumlah setiap transversal adalah  $c$ . Dari definisi matriks yang ajaib secara diagonal (3.2), diperoleh sistem persamaan linier

$$\tilde{A}_n \text{vec}(A^T) = c e_n \tag{5}$$

dengan  $\tilde{A}_n = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_{n^2}) \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$  adalah matriks koefisien dan  $e_n = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n!})^T$ . Jika  $n = 2$ , dari

definisi matriks yang ajaib secara diagonal dan (5), matriks koefisien  $\tilde{A}_2$  dapat dibentuk menjadi matriks berordo  $2 \times 4$

$$\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \tilde{a}_4),$$

dan jika dibentuk menjadi matriks diperbesar diperoleh

$$\hat{A}_2 = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 1 & 1 & 0 & c \end{array} \right) \tag{6}$$

Matriks diperbesar ini adalah bentuk eselon baris tereduksi, matriks diperbesar terdiri dari matriks koefisien dan matriks konstanta, maka untuk mengkonstruksi matriks yang ajaib secara diagonal harus mengetahui terlebih dahulu bagaimana mengkonstruksi matriks koefisien.

Perhatikan

Misalkan  $n \geq 2$

- Untuk  $n = k$ , maka matriks koefisien dapat dikonstruksi menjadi seperti berikut:

$$\tilde{A}_k = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_{k^2})$$

- Untuk  $n = k + 1$ , maka matriks koefisien dapat dikonstruksi menjadi seperti berikut:

Pertama, misalkan untuk  $1 \leq m \leq k$

$$C_{1,1}^{k+1} = (e_{k!}, 0_{k! \times k}),$$

$$C_{1,m+1}^{k+1} = (0_{k! \times 1}, \tilde{a}_{(m-1)k+1}, \tilde{a}_{(m-1)k+2}, \dots, \tilde{a}_{mk})$$

Kedua, misalkan untuk  $i = 2, 3, \dots, k + 1$  dan  $j = 1, 2, 3, \dots, k + 1$

$$C_{i,j}^{k+1} = C_{i-1,j}^{k+1} E_{i-1,i}^{k+1}$$

sehingga diperoleh matriks koefisien sebagai berikut:

$$\tilde{A}_{k+1} = \begin{pmatrix} C_{1,1}^{k+1} & C_{1,2}^{k+1} & \dots & C_{1,k+1}^{k+1} \\ C_{2,1}^{k+1} & C_{2,2}^{k+1} & \dots & C_{2,k+1}^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{k+1,1}^{k+1} & C_{k+1,2}^{k+1} & \dots & C_{k+1,k+1}^{k+1} \end{pmatrix} \tag{7}$$

Setelah mengetahui bentuk matriks koefisien dari matriks yang ajaib secara diagonal, sekarang dapat dibentuk matriks diperbesar dari matriks yang ajaib secara diagonal.

Perhatikan berikut:

Misalkan diasumsikan

$$C_i = (C_{i,1}^{k+1}, C_{i,2}^{k+1}, \dots, C_{i,k+1}^{k+1}, ce_{k!})$$

untuk  $i = 1, 2, \dots, k + 1$ .

Akibatnya, matriks diperbesar pada  $\tilde{A}_{k+1}$  adalah

$$(C_1^T, C_2^T, \dots, C_{k+1}^T)^T \tag{8}$$

Misalkan

$$D_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

$$F_{(n-1) \times n} = (I_{n-1} \quad -e_{n-1}) \in \mathbb{R}^{(n-1) \times n},$$

$$G_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 3-n \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 3-n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 3-n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 2-n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

untuk  $n \geq 2$  dapat dinyatakan bahwa bentuk eselon baris tereduksi dari matriks diperbesar dalam sistem persamaan linier (5) memiliki bentuk sebagai berikut:

$$\hat{A}_n = \left( \begin{array}{cccccc|c} I_n & \overbrace{D_n \quad D_n \quad \dots \quad D_n}^{(n-2)n} & G_n & ce_n \\ F_{(n-1) \times n} & 0 & -F_{(n-1) \times n} & 0 \\ & F_{(n-1) \times n} & -F_{(n-1) \times n} & 0 \\ & & \vdots & \vdots \\ 0 & & F_{(n-1) \times n} & -F_{(n-1) \times n} \\ & & 0 & 0 \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{n! \times n^2} \quad (9)$$

dari (9) untuk mengkonstruksikan matriks yang ajaib secara diagonal perhatikan berikut ini.

Asumsikan sebarang  $a_{i,n}, a_{n,j}$  untuk  $2 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n-1$ , adalah variabel bebas, dari persamaan (9) diperoleh:

$$a_{1,j} = - \sum_{i=2}^{n-1} a_{i,n} - \sum_{i \neq j}^{n-1} a_{n,i} + (n-3)a_{n,n} + c$$

untuk  $j = 1, \dots, n-1$ ,

dan

$$a_{1,n} = - \sum_{i=2}^{n-1} a_{i,n} - \sum_{i=1}^{n-1} a_{n,i} + (n-2)a_{n,n} + c$$

dan juga

$$a_{i,j} = a_{i,n} + a_{n,j} - a_{n,n}$$

untuk  $2 \leq i, j \leq n-1$ .

Sehingga untuk mengkonstruksi matriks yang ajaib secara diagonal, diperoleh:

$$A_n = \left( \begin{array}{cccc|c} - \sum_{i=2}^{n-1} a_{i,n} - \sum_{i \neq j}^{n-1} a_{n,i} + (n-3)a_{n,n} + c & \dots & - \sum_{i=2}^{n-1} a_{i,n} - \sum_{i \neq j}^{n-1} a_{n,i} + (n-3)a_{n,n} + c & - \sum_{i=2}^{n-1} a_{i,n} - \sum_{i=1}^{n-1} a_{n,i} + (n-2)a_{n,n} + c \\ a_{2,n} + a_{n,1} - a_{n,n} & \dots & a_{2,n} + a_{n,n-1} - a_{n,n} & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,n} + a_{n,1} - a_{n,n} & \dots & a_{n-1,n} + a_{n,n-1} - a_{n,n} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{array} \right) \quad (10)$$

### Rank dari Matriks yang Ajaib Secara Diagonal

Rank dari matriks yang ajaib secara diagonal yaitu dimensi ruang baris atau ruang kolom dari matriks yang ajaib secara diagonal. Kemudian akan ditunjukkan teorema rank dari matriks yang ajaib secara diagonal sebagai berikut:

**Teorema 5** [4] Misalkan  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  adalah matriks yang ajaib secara diagonal. Maka  $\text{rank}(A) \leq 2$ .

**Bukti:**

Misalkan  $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  adalah matriks yang ajaib secara diagonal.

Dengan menggunakan operasi baris elementer pada persamaan (10), yaitu

$$A_n = \begin{pmatrix} -\sum_{i=2}^{n-1} a_{i,n} - \sum_{i \neq j}^{n-1} a_{n,i} + (n-3)a_{n,n} + c & \dots & -\sum_{i=2}^{n-1} a_{i,n} - \sum_{i \neq j}^{n-1} a_{n,i} + (n-3)a_{n,n} + c & \dots & -\sum_{i=2}^{n-1} a_{i,n} - \sum_{i=1}^{n-1} a_{n,i} + (n-2)a_{n,n} + c \\ a_{2,n} + a_{n,1} - a_{n,n} & \dots & a_{2,n} + a_{n,n-1} - a_{n,n} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,n} + a_{n,1} - a_{n,n} & \dots & a_{n-1,n} + a_{n,n-1} - a_{n,n} & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Matriks diatas ekuivalen baris dengan

$$\begin{pmatrix} c - \sum_{i \neq j}^n a_{n,i} & c - \sum_{i \neq j}^n a_{n,i} & \dots & c - \sum_{i \neq j}^n a_{n,i} & c - \sum_{i \neq j}^n a_{n,i} \\ a_{2,n} - a_{n,n} & a_{2,n} - a_{n,n} & \dots & a_{2,n} - a_{n,n} & a_{2,n} - a_{n,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,n} - a_{n,n} & a_{n-1,n} - a_{n,n} & \dots & a_{n-1,n} - a_{n,n} & a_{n-1,n} - a_{n,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix} \tag{11}$$

Dengan menggunakan operasi baris elementer, bentuk eselon baris tereduksi dari matriks pada (11) yaitu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{a_{n,2}-a_{n,3}}{a_{n,1}-a_{n,2}} & \dots & -\frac{a_{n,2}-a_{n,n}}{a_{n,1}-a_{n,2}} \\ 0 & 1 & \frac{a_{n,1}-a_{n,3}}{a_{n,1}-a_{n,2}} & \dots & \frac{a_{n,1}-a_{n,n}}{a_{n,1}-a_{n,2}} \\ 0_{(n-2) \times 1} & 0_{(n-2) \times 1} & 0_{(n-2) \times 1} & \dots & 0_{(n-2) \times 1} \end{pmatrix} \tag{12}$$

Dapat dilihat bahwa (12) memiliki vektor kolom dan vektor baris tak nol 2 sehingga disimpulkan untuk  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  adalah matriks yang ajaib secara diagonal dapat dipastikan memiliki  $\text{rank}(A) \leq 2$ .

∴ Terbukti bahwa  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  adalah matriks yang ajaib secara diagonal memiliki  $\text{rank}(A) \leq 2$ .

**Kesimpulan**

1. Matriks yang ajaib secara diagonal dapat dikonstruksikan sebagai berikut:

$$A_n = \begin{pmatrix} -\sum_{i=2}^{n-1} a_{i,n} - \sum_{i \neq j}^{n-1} a_{n,i} + (n-3)a_{n,n} + c & \dots & -\sum_{i=2}^{n-1} a_{i,n} - \sum_{i \neq j}^{n-1} a_{n,i} + (n-3)a_{n,n} + c & \dots & -\sum_{i=2}^{n-1} a_{i,n} - \sum_{i=1}^{n-1} a_{n,i} + (n-2)a_{n,n} + c \\ a_{2,n} + a_{n,1} - a_{n,n} & \dots & a_{2,n} + a_{n,n-1} - a_{n,n} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,n} + a_{n,1} - a_{n,n} & \dots & a_{n-1,n} + a_{n,n-1} - a_{n,n} & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

dengan  $a_{i,n}, a_{n,j}$  untuk  $2 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n - 1$  adalah variabel bebas.

2. Misalkan  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  adalah matriks yang ajaib secara diagonal. Maka  $\text{rank}(A) \leq 2$ .

**Referensi**

[1] Anton, Howard., *Aljabar Linier Elementer*, edisi 5, terjemahan Pantur silaban dan I.Nyiman Susila, Erlangga, 1997.

[2] T.Sujuto, N.Bowo, Z.A,Erna, Astuti.Setia, Rahayu.Yuniarsih, Mulyanto,Edy, *Teori dan Aplikasi Aljabar Linier dan Matriks*, Andi, Yogyakarta,UDINUS, Semarang, 2010.

[3] Zhan, X:Matrix Theory.Am.Math.Soc., *A Note On The Rank Inequality For Diagonally Magic Matrices*, J. Inequal. Appl. 2015,318(2016).

[4] Zhou, D, Chen, G, Cai, Q, Chen,X, *The Rank Inequality For Diagonal Magic Matrices*, J. Inequal. Appl. 2015,318(2015).