PELABELAN TOTAL TAK TERATUR TOTAL PADA GRAF BUNGA (F_n)

Siti Julaeha*, Ita Luspitasari, dan Esih Sukaesih

Abstrak

Suatu pelabelan total $f: V \cup U \rightarrow \{1,2,\dots,k\}$ disebut pelabelan-k total tak teratur total dari G jika setiap dua titik x dan y yang berbeda di $V(G)$ memenuhi $wt(x) \neq wt(y)$ dan setiap dua sisi x_1x_2 dan y_1y_2 yang berbeda $E(G)$ memenuhi $wt(x_1x_2) \neq wt(y_1y_2)$ dimana $wt(x) = f(x) + \sum(xz)$ dan $wt(x_1x_2) = f(x_1) + f(x_1x_2) + f(x_2)$. Label k minimum pada G yang memenuhi pelabelan-k total tak teratur total disebut *total irregularity strength* pada G, yang dinotasikan $ts(G)$. Pada skripsi ini akan ditentukan nilai total tak teratur total pada graf bunga (F_n).

Kata-kata kunci: pelabelan total tak teratur titik, pelabelan total tak teratur sisi, pelabelan total tak teratur total, graf roda, graf helm, graf bunga, nilai total keteraturan total.

Pendahuluan

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang pertama kali di perkenalkan pada tahun 1736 ketika Leonhard Euler mempublikasikan bukunya mengenai pemecahan masalah jembatan Königsberg yang berjudul *Solutio Problematis Ad Geometriam Situs Pertinentis.*[2]

Teori graf mengandung banyak aspek penting dalam studinya, salah satunya adalah pelabelan. Pelabelan pertama kali diperkenalkan oleh Sadlàčk (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1967). Hingga saat ini pemanfaatan pelabelan graf sangat dirasakan peranannya, terutama pada sektor sistem komunikasi dan transportasi.

Pelabelan merupakan pemetaan satu-satu yang memetakan unsur himpunan titik atau unsur himpunan sisi ke bilangan asli yang disebut label. Pelabelan titik adalah pelabelan dengan domain himpunan titik, pelabelan sisi adalah pelabelan dengan domain himpunan sisi, dan pelabelan total adalah pelabelan dengan domain gabungan himpunan titik dan himpunan sisi.

Martin Bača dkk [7] memperkenalkan tipe pelabelan baru yang dinamakan pelabelan total tak teratur, yang mempunyai dua jenis

 ISSN 1979-8911

yakni pelabelan total tak teratur sisi dan pelabelan total tak teratur titik. Pelabelan-k total disebut pelabelan-k total tak teratur sisi pada graf jika untuk setiap dua sisi yang berbeda e dan f pada graf memenuhi $wt(e) \neq wt(f)$. *Total edge irregularity strength*, dinotasikan dengan $(tes(G))$, adalah bilangan bulat positif terkecil k dimana graf G memenuhi pelabelan-k total tak teratur sisi. Pelabelan-k total didefinisikan sebagai pelabelan-k total tak teratur titik dari graf jika untuk setiap dua titik yang berbeda x dan y pada graf memenuhi $wt(x) \neq wt(y)$. *Total vertex irregularity strength* pada graf, dinotasikan dengan $tvs(G)$, adalah nilai k terkecil dimana graf G memenuhi pelabelan-k total tak teratur titik.

Seiring perkembangan zaman, kajian terhadap pelabelan mengalami perkembangan yang pesat. Salah satu perkembangan dari pelabelan adalah pelabelan total tak teratur total yang diperkenalkan oleh Marzuki, Salman dan Miller dalam makalahnya uang berjudul on total irregularity strength on cycles and paths. [9]

Suatu pelabelan total $f: V \cup U \rightarrow \{1,2,\dots,k\}$ disebut pelabelan-k total tak teratur total dari G jika setiap dua titik x dan y yang berbeda di $V(G)$ memenuhi $wt(x) \neq wt(y)$ dan setiap dua sisi x_1x_2 dan y_1y_2 yang berbeda $E(G)$ memenuhi $wt(x_1x_2) \neq wt(y_1y_2)$ dimana $wt(x) = f(x) + \sum(xz)$ dan $wt(x_1x_2) = f(x_1) + f(x_1x_2) + f(x_2)$. Label k minimum pada G yang memenuhi pelabelan-k total tak teratur total disebut *the total irregularity strength* pada G, yang dinotasikan $ts(G)$.[4]

Berdasarkan pemaparan tersebut, akan diteliti pelabelan total tak teratur total pada graf bunga (F_n).

Teori

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), dituliskan dengan notasi $G = (V, E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari titik-titik dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang titik [9].

Dari definisi graf diketahui bahwa V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi titiknya harus ada, minimal satu. Graf yang hanya mempunyai sisi satu buah simpul tanpa sebuah sisi pun dinamakan graf trivial. Titik pada graf dapat dinomori dengan huruf, seperti $a, b, c, \dots, v, w, \dots,$ dengan bilangan asli $1,2,3, \dots,$ atau gabungan keduanya. Sedangkan sisi yang menghubungkan simpul u dengan simpul v dinyatakan dengan pasangan (u, v) atau dinyatakan dengan lambang $e_1, e_2, \dots,$ dengan kata lain, jika e adalah sisi yang menghubungkan simpul u dengan simpul v, maka e dapat ditulis sebagai $e = (u, v)$.

Ada beberapa jenis graf yang dijumpai pada banyak aplikasi, beberapa diantaranya adalah [9]:

Graf sederhana adalah graf yang tidak mengandung gelang ataupun sisi ganda. Pada graf sederhana, sisi adalah pasangan tak-terurut. Jadi, menuliskan sisi (u, v) sama saja dengan (v, u). Dua buah titik u dan titik v dikatakan **terhubung** jika terdapat lintasan dari u ke v. Jika dua buah titik terhubung maka pasti titik yang pertama dapat dicapai dari simpul yang kedua. **Graf lengkap** adalah graf sederhana yang setiap titiknya mempunyai sisi ke titik lainnya. Graf lengkap dengan n buah titik dilambangkan dengan K_n. setiap titik K_n berderajat $n - 1$. **Graf lingkaran** adalah graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n titik dilambangkan dengan C_n . Graf G disebut **graf bipartit** jika himpunan titiknya dapat dikelompokkan menjadi dua himpunan bagian V_1 dan V_2, sedemikian sehingga setiap sisi di dalam G menghubungkan sebuah simpul di V_1 ke sebuah titik di V_2. **Graf bipartit lengkap** adalah suatu graf bipartit yang semua simpul di partisi satu dihubungkan ke semua simpul di partisi yang lain. Notasi graf bipartit lengkap dengan banyaknya simpul di bagian yang satu m dan bagian yang lain m adalah $K_{m,n}$. **Graf roda** adalah graf yang memuat lingkaran yang mana setiap titik pada lingkaran terhubung langsung dengan titik pusat. Graf roda dinotasikan W_n dan $n \geq 3$ dan memiliki $2n + 1$ titik dan $2n$ sisi [2]. **Graf helm** adalah graf yang didapatkan dari graf roda dengan menambahkan sisi anting-anting

ISSN 1979-8911

pada titik di lingkaran. Graf helm dinotasikan H_n. Sehingga himpunan titik pada H_n adalah $V = \{u, v_i, u_i : 1 \leq i \leq n\}$, dan himpunan sisi pada H_n adalah $E = \{uv_i, v_iv_{i+1}, v_iu_i : 1 \leq i \leq n\}$ [3]. Graf Helm H_n memiliki $2n + 1$ titik dan $3n$ sisi [2].

Pelabelan Graf

Pelabelan pada suatu graf adalah sebarang pemetaan atau fungsi yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan (biasanya dengan bilangan bulat positif) [2].

Berdasarkan domainnya, pelabelan graf terbagi menjadi tiga:

1. Jika domain dari pemetaan berupa titik maka pelabelan disebut pelabelan titik.
2. Jika domainnya adalah sisi, maka pelabelan disebut pelabelan sisi.
3. Jika domainnya titik dan sisi, maka pelabelan disebut pelabelan total.

Pelabelan Total Tak Teratur

Martin Bača dkk [7] memperkenalkan tipe pelabelan baru yang dinamakan pelabelan total tak teratur, yang mempunyai dua jenis yakni pelabelan total tak teratur sisi dan pelabelan total tak teratur titik.

Pelabelan Total Tak Teratur Titik

Pelabelan- k total disebut pelabelan-k total tak teratur titik jika untuk setiap dua buah titik yang berbeda u, v di G , $wt(u) \neq wt(v)$, dimana $wt(u)$ dan $wt(v)$) adalah bobot dari titik u, v. Bobot dari suatu titik u di G didefinisikan sebagai $wt(u) = \phi(u) + \sum_{uv \epsilon E} \phi(uv)$ [4].

Nilai total keteraturan titik (*Total vertex irregularity strength*) pada graf, dinotasikan dengan $tvs(G)$, adalah nilai k terkecil dimana graf G memenuhi pelabelan-k total tak teratur titik.

Pada makalah martin baca dkk, telah ditentukan nilai total keteraturan titik yang terangkum dalam teorema-teorema berikut ini.

Teorema 1. [7] Misal G merupakan graf-(p, q) dengan derajat minimum $\delta = \delta(G)$ dan derajat maksimum $\Delta = \Delta(G)$, maka

$$\left\lceil \frac{p + \delta}{\Delta + 1} \right\rceil \leq tvs(G) \leq p - \Delta - 2\partial + 1$$

Teorema 2. [7] misal $K_{1,n}$ merupakan graf bintang dengan n pendan titik maka

$$tvs\ (K_{1,n}) = \left\lceil \frac{i + 1}{2} \right\rceil$$

Pelabelan Total Tak Teratur Sisi

Pelabelan- k total disebut pelabelan-k total tak teratur sisi jika untuk setiap dua buah sisi yang berbeda e, f di G, $wt(e) \neq wt(f)$, dimana $wt(e)$ dan $wt(f)$ adalah bobot dari sisi e, f. Bobot dari suatu sisi $e = (u, v)$ di G didefinisikan sebagai

$wt(u) = \phi(u) + \phi(uv) + \phi(v)$. [4]

Nilai total keteraturan sisi (*Total edge irregularity strength*), dinotasikan dengan $(tes(G))$ adalah bilangan bulat positif terkecil k dimana graf G memenuhi pelabelan-k total tak teratur sisi.

Pada makalah martin baca dkk, telah ditentukan nilai total keteraturan sisi yang terangkum dalam teorema-teorema berikut ini.

Teorema 3. [7] Misal $G = (V, E)$ adalah sebuah graf dengan himpunan titik V dan sebuah himpunan sisi tidak kosong E. Maka

$$\left\lceil \frac{|E| + 2}{3} \right\rceil \leq tes(G) \leq |E|$$

Teorema 4. [7] Misal P_n dan C_n adalah sebuag lintasan dan lingkaran, masing-masing, dengan banyaknya sisi $n \geq 1$, maka

$$tes(P_n) = tes(C_n) = \left\lceil \frac{n + 2}{3} \right\rceil$$

Pelabelan Total Tak Teratur Total

Seiring perkembangan zaman, kajian terhadap pelabelan mengalami perkembangan yang pesat. Salah satu perkembangan dari pelabelan adalah pelabelan total tak teratur total yang diperkenalkan oleh Marzuki, Salman dan Miller dalam makalahnya uang berjudul *on total irregularity strength on cycles and paths*.[4]

Suatu pelabelan total $f: V \cup U \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ disebut pelabelan-k total tak teratur total dari G jika setiap dua titik x dan y yang berbeda di $V(G)$ memenuhi $wt(x) \neq wt(y)$ dan setiap dua sisi x_1x_2 dan y_1y_2 yang berbeda $E(G)$ memenuhi $wt(x_1x_2) \neq wt(y_1y_2)$ dimana $wt(x) = f(x) + \sum(xz)$ dan $wt(x_1x_2) = f(x_1) + f(x_1x_2) + f(x_2)$. Label k minimum pada G yang memenuhi pelabelan-k total tak teratur total disebut *total irregularity strength* pada G, yang dinotasikan $ts(G)$. [4]

Pada makalah marzuki dkk, telah ditentukan nilai total ketakteraturan dari graf lintasan dan graf lingkaran yang terangkum dalam teorema-teorema berikut ini.

Teorema 5. [4] Untuk setiap graf $G, ts(G) \geq \max\{tvs(G); tes(G)\}$

Teorema 6. [4] Misalkan $n \geq 3$ bilangan bulat positif dan C_n adalah suatu graf lingkaran dengan n sisi, maka

$$ts(C_n) = \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil$$

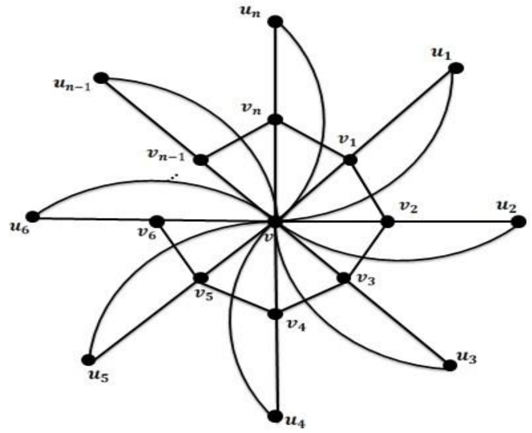
Teorema 7. [4] Misalkan n suatu bilangan bulat positif dan P_n adalah graf lintasan dengan n titik, maka

$$ts(P_n) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil, & \text{untuk } n = 2 \text{ atau } 5 \\ \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil, & \text{untuk } n \text{ lainnya} \end{cases}$$

Hasil dan diskusi

Pelabelan Total Tak Teratur Total Pada Graf Bunga (F_n)

Definisi 8. Graf bunga adalah graf yang diperoleh dari graf helm yang menghubungkan tiap-tiap anting-anting ke titik pusat graf helm. Graf bunga dinotasikan dengan F_n.



Gambar 1. Graf Bunga (F_n)

Himpunan titik dan sisi pada graf bunga F_n adalah

$V = \{v, v_i, u_i : 1 \leq i \leq n\}$, dengan $\deg(v) = 2n, \deg(v_i) = 4$ dan $\deg(u_i) = 2$

$E = \{vv_i, vu_i, v_iv_{i+1}, v_iu_i : 1 \leq i \leq n\}$

Teorema 9. Misalkan F_n adalah graf bunga dengan banyaknya titik $2n + 1$ dan banyaknya sisi $4n$, maka $ts\ (F_n) = \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil$ untuk $n \geq 3$.

Bukti:

Terdapat dua langkah untuk membuktikan teorema 9 yaitu dengan menentukan batas bawah dan batas atas dari $ts\ (F_n)$. seperti yang akan diuraikan sebagai berikut:

Langkah I: Akan dibuktikan bahwa $ts\ (F_n) \geq \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil$.

Graf bunga memiliki $2n + 1$ titik dan $4n$ sisi. Derajat terkecil dari graf bunga yaitu $\delta(F_n) = 2$ dan derajat terbesar dari graf bunga yaitu $\Delta(F_n) = 2n$.

Berdasarkan teoream 1

$$tes\ (F_n) \geq \left\lceil \frac{|E|+2}{3} \right\rceil$$

$$= \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil$$

Sehingga, $tes\ (F_n) \geq \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil$.

Karena graf helm H_n memiliki $2n+1$ titik dan $3n$ sisi, maka

$$tvs\ (F_n) \geq \left\lceil \frac{p+\delta}{\Delta+1} \right\rceil$$

$$= \left\lceil \frac{2n+1+2}{2n+1} \right\rceil$$

$$= \left\lceil \frac{2n+3}{2n+1} \right\rceil$$

Sehingga, $tvs\ (F_n) \geq \left\lceil \frac{2n+3}{2n+1} \right\rceil$

Selanjutnya, berdasarkan teorema 4,

$$ts\ (F_n) \geq \max\left\{\left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil, \left\lceil \frac{2n+3}{2n+1} \right\rceil\right\}$$

$$= \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil$$

Akan ditunjukkan bahwa $\text{maks}\left\{\left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil, \left\lceil \frac{2n+3}{2n+1} \right\rceil\right\} = \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil$. Dengan kata lain $\left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{2n+3}{2n+1} \right\rceil$.

Bukti:

Misalkan $p(n)$ adalah proposisi bahwa $\left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{2n+3}{2n+1} \right\rceil$, untuk n bilangan bulat positif yang besar sama dengan 3.

(i) Basis induksi: $p(3)$ benar, karena

$$\left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{2n+3}{2n+1} \right\rceil$$

$$\left\lceil \frac{4(3)+2}{3} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{2(3)+3}{2(3)+1} \right\rceil$$

$$\left\lceil \frac{12+2}{3} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{6+3}{6+1} \right\rceil$$

$$\left\lceil \frac{14}{3} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{9}{7} \right\rceil$$

$$5 \geq 2$$

(ii) Langkah induksi, misalkan $p(n)$ benar, yaitu asumsikan bahwa $\left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{2n+3}{2n+1} \right\rceil$ adalah benar. Tunjukkan bahwa $p(n+1)$ juga benar, yaitu $\left\lceil \frac{4(n+1)+2}{3} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{2(n+1)+3}{2(n+1)+1} \right\rceil$ hal ini ditunjukan sebagai berikut:

$$\left\lceil \frac{4(n+1)+2}{3} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{2(n+1)+3}{2(n+1)+1} \right\rceil$$

$$\left\lceil \frac{4n+4+2}{3} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{2n+2+3}{2n+2+1} \right\rceil$$

$$\left\lceil \frac{4n+6}{3} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{2n+5}{2n+3} \right\rceil$$

menurut hipotesis induksi maka $\left\lceil \frac{4n+6}{3} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{4n+6}{2n+3} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{4n+5}{2n+3} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{2n+5}{2n+3} \right\rceil$ sehimgga terbukti bahwa $\left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{2n+3}{2n+1} \right\rceil$

 ISSN 1979-8911

Sehingga $ts\ (F_n) \geq \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil$ (1)

Langkah II:

Akan dibuktikan bahwa $ts\ (F_n) \leq \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil$.

- **Untuk $n \equiv 0\ (mod\ 3)$**

Pelabelan Pada Titik

$$f(v) = \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil$$

Untuk pelabelan titik dan sisi selanjutnya pada graf bunga akan dimisalkan $a = \frac{\left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil - 1}{2}$, nilai a digunakan untuk membatasi pelabelan ruas kanan dan ruas kiri.

$$f(u_i) = \begin{cases} i, & 1 \leq i \leq a \\ f(u_{i-1}) + 2, & a+1 \leq i \leq n-1 \\ \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil, & i = n \end{cases}$$

$$f(v_i) = \begin{cases} i, & 1 \leq i \leq a+1 \\ f(v_{i-1}) + 2, & a+2 \leq i \leq n-1 \\ \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil - 2 & i = n \end{cases}$$

Pelabelan Pada Sisi

$$f(vv_i) = \begin{cases} i+1 & 1 \leq i \leq a-1 \\ a+2 & i = a \text{ jika } n = 3 \\ a+4 & i = a \text{ jika } n > 3 \\ f(vv_{i-1}) + 3 & i = a+1 \\ f(vv_{i-1}) + 2 & a+2 \leq i \leq n-2 \\ \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil & i = n-1, n \end{cases}$$

$$f(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} 1 & 1 \leq i \leq a \\ \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil - 2 & a+1 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

$$f(v_n v_1) = \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil$$

$$f(u_i v_i) = \begin{cases} 1 & 1 \leq i \leq a \\ \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil - 2 & a+1 \leq i \leq n-1 \\ \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil - 1 & i = n \end{cases}$$

$$f(vu_i) = \begin{cases} i & 1 \leq i \leq a-1 \\ a+3 & i = a \text{ jika } n > 3 \\ f(vu_{i-1}) + 2 & a+1 \leq i \leq n-2 \\ \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil - 2 & i = n-1 \\ \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil - 1 & i = n \end{cases}$$

- **Untuk n$\equiv$ 1 $(mod\ 3)$**

Pelabelan Pada Titik

$$f(v) = \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil$$

Untuk pelabelan titik dan sisi selanjutnya pada graf bunga akan dimisalkan $a = \frac{\left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil}{2}$, nilai a digunakan untuk membatasi pelabelan ruas kanan dan ruas kiri.

$$f(u_i) = \begin{cases} i, & 1 \leq i \leq a \\ a+3\ , & i = a+1 \\ f(u_{i-1}) + 2\ , & a+1 \leq i \leq n-1 \\ \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil, & i = n \end{cases}$$

$$f(v_i) = \begin{cases} i\ , & 1 \leq i \leq a \\ f(v_{i-1}) + 2, & a+1 \leq i \leq n-1 \\ \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil - 1, & i = n \end{cases}$$

Pelabelan Pada Sisi

$$f(vv_i) = \begin{cases} i+1, & 1 \leq i \leq a-1 \\ a+4, & i = a \\ f(vv_{i-1}) + 2, & a+1 \leq i \leq n-2 \\ \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil, & i = n-1, n \end{cases}$$

$$f(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} 1 & 1 \leq i \leq a-1 \\ \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil - 1 & a \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

$$f(v_1 v_n) = \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil$$

$$f(u_i v_i) = \begin{cases} 1 & 1 \leq i \leq a \\ \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil - 3 & a+1 \leq i \leq n-1 \\ \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil - 1 & i = n \end{cases}$$

$$f(vu_i)=\begin{cases} i & 1\le i\le a-1\\ a+2 & i=a \text{ jika } n=4\\ a+3 & i=a \text{ jika } n=4\\ a+3 & i=a+1 \text{ jika } n=7\\ f(vu_{i-1})+2 & a+2\le i\le n-2\\ f(vu_{i-1})+1 & i=n-1\\ \left\lceil\dfrac{4n+2}{3}\right\rceil & i=n \end{cases}$$

- **Untuk n$\equiv$ 2 $(mod\ 3)$**

Pelabelan Pada Titik

$$f(v)=\left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil$$

Untuk pelabelan titik dan sisi selanjutnya pada graf bunga akan dimisalkan $a=\dfrac{\left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil}{2}$, nilai a digunakan untuk membatasi pelabelan ruas kanan dan ruas kiri.

$$f(u_i)=\begin{cases} i, & 1\le i\le a\\ a+3 & i=a+1\\ f(u_{i-1})+2 & a+2\le i\le n-1\\ \left\lceil\dfrac{4n+2}{3}\right\rceil-1, & i=n \end{cases}$$

$$f(v_i)=\begin{cases} i, & 1\le i\le a\\ f(v_{i-1})+2, & a+1\le i\le n-1\\ \left\lceil\dfrac{4n+2}{3}\right\rceil-3 & i=n \end{cases}$$

Pelabelan Pada Sisi

$$f(vv_i)=\begin{cases} i+1 & 1\le i\le a-2\\ a+3 & i=a \text{ jika } n=5\\ a+4 & i=a-1, a \text{ jika } n>5\\ f(vv_{i-1})+2 & a+1\le i\le n-2\\ f(vv_{i-1})+1 & i=n-1\\ \left\lceil\dfrac{4n+2}{3}\right\rceil & i=n \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 & 1\le i\le a-1\\ \left\lceil\dfrac{4n+2}{3}\right\rceil-2 & i=a \text{ jika } n=5\\ \left\lceil\dfrac{4n+2}{3}\right\rceil-3 & i=a \text{ jika } n>5\\ \left\lceil\dfrac{4n+2}{3}\right\rceil-1 & a+1\le i\le n-2\\ \left\lceil\dfrac{4n+2}{3}\right\rceil & i=n-1 \end{cases}$$

$$f(v_nv_1)=\left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil$$

$$f(u_iv_i)=\begin{cases} 1 & 1\le i\le a\\ \left\lceil\dfrac{4n+2}{3}\right\rceil-5 & i=a+1\\ \left\lceil\dfrac{4n+2}{3}\right\rceil-3 & a+2\le i\le n-1\\ \left\lceil\dfrac{4n+2}{3}\right\rceil & i=n \end{cases}$$

$$\begin{cases} i & 1\le i\le a-2\\ f(vu_{i-1})+3 & i=a-1 \text{ jika } n=5\\ f(vu_{i-1})+4 & i=a-1, a \text{ jika } n>5\\ f(vu_{i-1})+2 & i=n-1 \text{ jika } n=5 \text{ dan } 8\\ f(vu_{i-1})+1 & a+1\le i\le n-2\\ f(vu_{i-1})+1 & i=n-1\\ \left\lceil\dfrac{4n+2}{3}\right\rceil-1 & i=n \end{cases}$$

Untuk menunjukkan bahwa f merupakan pelabelan total tak teratur total, maka akan ditunjukkan bahwa berdasarkan pelabelan f, bobot semua titik pada F_n berbeda, dan bobot semua sisi pada F_n juga berbeda.

Untuk $n\equiv 0\ (mod\ 3)$

1. Bobot titik (u_i)
   - Bobot titik (u_i) untuk $1\le i\le a-1$

     $$wt\ (u_i)=2i+1$$

   - Bobot titik (u_i) untuk $i=a$ jika $n=3$

     $$wt\ (u_i)=i+a+2$$

   - Bobot titik (u_i) untuk $i=a$ jika $n>3$

     $$wt\ (u_i)=i+a+4$$

- Bobot titik (u_i) untuk $a+1 \leq i \leq n-2$

$$wt\,(u_i) = f(u_i) + f(vu_i) + \left(\left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil - 2\right)$$

- Bobot titik (u_i) untuk $i = n-1$

$$wt\,(u_i) = f\,(u_i) + 2\left(\left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil\right) - 4$$

- Bobot titik (u_i) untuk $i = n$

$$wt\,(u_i) = 3\left(\left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil\right) - 2$$

2. Bobot titik (v_i)

- Bobot titik (v_i) untuk $i = 1$

$$wt\,(v_i) = \left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil + 5$$

- Bobot titik (v_i) untuk $2 \leq i \leq a-1$

$$wt\,(v_i) = 2i + 4$$

- Bobot titik (v_i) untuk $i = a$ jika $n = 3$

$$wt\,(v_i) = i + a + 5$$

- Bobot titik (v_i) untuk $i = a$ jika $n > 3$

$$wt\,(v_i) = i + a + 7$$

- Bobot titik (v_i) untuk $i = a+1$

$$wt\,(v_i) = i + 2\left(\left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil\right) + f(vv_i) - 3$$

- Bobot titik (v_i) untuk $a+2 \leq i \leq n-2$

$$wt\,(v_i) = 3\left(\left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil\right) + f(v_i) + f(vv_i) - 6$$

- Bobot titik (v_i) untuk $i = n-1$

$$wt\,(v_i) = 4\left(\left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil\right) + f(v_i) - 6$$

- Bobot titik (v_i) untuk $i = n$ jika $n = 3$

$$wt\,(v_i) = 4\left(\left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil\right) - 2$$

- Bobot titik (v_i) untuk $i = n$ jika $n > 3$

$$wt\,(v_i) = 5\left(\left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil\right) - 5$$

3. Bobot titik (v)

$$wt\,(v_i) = v + \sum_{i=1}^{n} f(vv_i) + f(vu_i)$$

4. Bobot sisi (vv_i)

- Bobot sisi (vv_i) untuk $1 \leq i \leq a-1$

$$wt\,(vv_i) = 2i + \left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil + 1$$

- Bobot sisi (vv_i) untuk $i = a$ jika $n = 3$

$$wt\,(vv_i) = i + \left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil + a + 2$$

- Bobot sisi (vv_i) untuk $i = a$ jika $n > 3$

$$wt\,(vv_i) = i + \left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil + a + 4$$

- Bobot sisi (vv_i) untuk $i = a + 1$

$$wt\ (vv_i) = i + \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil + f(vv_i)$$

- Bobot sisi (vv_i) untuk $a + 2 \le i \le n - 2$

$$wt\ (vv_i) = \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil + f(vv_i) + f(v_i)$$

- Bobot sisi (vv_i) untuk $i = n - 1$

$$wt\ (vv_i) = 2\left(\left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil\right) + f(v_i)$$

- Bobot sisi (vv_i) untuk $i = n$

$$wt\ (vv_n) = 3\left(\left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil\right) - 2$$

5. Bobot sisi $(v_i v_{i+1})$

- Bobot sisi $(v_i v_{i+1})$ untuk $1 \le i \le a$

$$wt\ (v_i v_{i+1}) = 2i + 2$$

- Bobot sisi $(v_i v_{i+1})$ untuk $i = a + 1$

$$wt\ (v_i v_{i+1}) = 2i + \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil$$

- Bobot sisi $(v_i v_{i+1})$ untuk $a + 2 \le i \le n - 1$

$$wt\ (v_i v_{i+1}) = f(v_i) + \left(\left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil - 2\right) + f(v_{i+1})$$

- Bobot sisi $(v_i v_{i+1})$ untuk $i = n$

$$wt\ (v_1 v_n) = 2\left(\left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil\right) - 1$$

6. Bobot sisi $(v_i u_i)$

- Bobot sisi $(v_i u_i)$ untuk $1 \le i \le a$

$$wt\ (v_i u_i) = 2i + 1$$

- Bobot sisi $(v_i u_i)$ untuk $i = a + 1$

$$wt\ (v_i u_i) = i + \left(\left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil - 2\right) + f(u_i)$$

- Bobot sisi $(v_i u_i)$ untuk $a + 2 \le i \le n - 1$

$$wt\ (v_i u_i) = f(v_i) + \left(\left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil - 2\right) + f(u_i)$$

- Bobot sisi $(v_i u_i)$ untuk $i = n$

$$wt\ (v_n u_n) = 3\left(\left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil\right) - 3$$

7. Bobot sisi (vu_i)

- Bobot sisi (vu_i) untuk $1 \le i \le a - 1$

$$wt\ (vu_i) = 2i + \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil$$

- Bobot sisi (vu_i) untuk $i = a$ jika $n = 3$

$$wt\ (vu_i) = i + \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil + a + 1$$

- Bobot sisi (vu_i) untuk $i = a$ jika $n > 3$

$$wt\ (vu_i) = i + \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil + a + 3$$

- Bobot sisi (vu_i) untuk $a+1 \le i \le n-2$

$$wt\ (vu_i) = \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil + f(vu_i) + f(u_i)$$

- Bobot sisi (vu_i) untuk $i = n-1$

$$wt\ (vu_i) = 2\left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil + f(u_i) - 2$$

- Bobot sisi (vu_i) untuk $i = n$

$$wt\ (vu_n) = 3\left(\left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil\right) - 1$$

Untuk $n \equiv 1\ (mod\ 3)$

1. Bobot titik (u_i)

- Bobot titik (u_i) untuk $1 \le i \le a-1$

$$wt\ (u_i) = 2i + 1$$

- Bobot titik (u_i) untuk $i = a$ jika $n = 4$

$$wt\ (u_i) = i + a + 3$$

- Bobot titik (u_i) untuk $i = a$ jika $n > 4$

$$wt\ (u_i) = i + a + 4$$

- Bobot titik (u_i) untuk $i = a + 1$

$$wt\ (u_i) = a + \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil + f(vu_i)$$

- Bobot titik (u_i) untuk $a+2 \le i \le n-1$

$$wt\ (u_i) = f(u_i) + f(vu_i) + \left(\left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil - 3\right)$$

- Bobot titik (u_i) untuk $i = n$

$$wt\ (u_i) = 3\left(\left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil\right) - 1$$

2. Bobot titik (v_i)

- Bobot titik (v_i) untuk $i = 1$

$$wt\ (v_i) = \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil + 5$$

- Bobot titik (v_i) untuk $2 \le i \le a-1$

$$wt\ (v_i) = 2i + 4$$

- Bobot titik (v_i) untuk $i = a$ jika $n = 5$

$$wt\ (v_i) = i + a + \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil + 4$$

- Bobot titik (v_i) untuk $i = a$ jika $n > 5$

$$wt\ (v_i) = i + a + \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil + 3$$

- Bobot titik (v_i) untuk $i = a + 1$

$$wt\ (v_i) = f(v_i) + f(vv_i) + 3\left(\left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil\right) - 9$$

- Bobot titik (v_i) untuk $a+2 \le i \le n-1$

$$wt\ (v_i) = f(v_i) + f(vv_i) + 3\left(\left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil\right) - 5$$

- Bobot titik (v_i) untuk $i = n$

$$wt\ (v_n) = 5\left(\left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil\right) - 4$$

3. Bobot titik (v)

$$wt\ (v_i) = v + \sum_{i=1}^{n}(f(vv_i) + f(vu_i))$$

4. Bobot sisi (vv_i)

- Bobot sisi (vv_i) untuk $1 \leq i \leq a-2$

$$wt\ (vv_i) = 2i + \left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil + 1$$

- Bobot sisi (vv_i) untuk $i = a-1$ jika $n = 5$

$$wt\ (vv_i) = i + \left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil + a + 4$$

- Bobot sisi (vv_i) untuk $i = a-1$ jika $n > 5$

$$wt\ (vv_i) = i + \left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil + a + 4$$

- Bobot sisi (vv_i) untuk $i = a$

$$wt\ (vv_i) = i + \left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil + a + 4$$

- Bobot sisi (vv_i) untuk $a+1 \leq i \leq n-2$

$$wt\ (vv_i) = \left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil + f(vv_i) + f(v_i)$$

- Bobot sisi (vv_i) untuk $i = n-1, n$

$$wt\ (vv_i) = 2\left(\left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil\right) + f(v_i)$$

5. Bobot sisi $(v_i v_{i+1})$

- Bobot sisi $(v_i v_{i+1})$ untuk $1 \leq i \leq a-1$

$$wt\ (v_i v_{i+1}) = 2i + 2$$

- Bobot sisi $(v_i v_{i+1})$ untuk $i = a$ jika $n = 5$

$$wt\ (v_i v_{i+1}) = 2i + \left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil$$

- Bobot sisi $(v_i v_{i+1})$ untuk $i = a$ jika $n > 5$

$$wt\ (v_i v_{i+1}) = 2i + \left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil - 1$$

- Bobot sisi $(v_i v_{i+1})$ untuk $a+1 \leq i \leq n-1$

$$wt\ (v_i v_{i+1}) = f(v_i) + \left(\left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil - 1\right) + f(v_{i+1})$$

- Bobot sisi $(v_i v_{i+1})$ untuk $i = n$

$$wt\ (v_1 v_n) = 2\left(\left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil\right)$$

6. Bobot sisi $(v_i u_i)$

- Bobot sisi $(v_i u_i)$ untuk $1 \leq i \leq a$

$$wt\ (v_i u_i) = 2i + 1$$

- Bobot sisi $(v_i u_i)$ untuk $i = a+1$

$$wt\ (v_i u_i) = f(v_i) + \left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil + a$$

- Bobot sisi $(v_i u_i)$ untuk $a+2 \leq i \leq n-1$

$$wt\ (v_iu_i) = f(v_i) + \left(\left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil - 3\right) + f(u_i)$$

- Bobot sisi (v_iu_i) untuk $i = n$

$$wt\ (v_nu_n) = 3\left(\left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil\right) - 2$$

7. Bobot sisi (vu_i)

- Bobot sisi (vu_i) untuk $1 \le i \le a-1$

$$wt\ (vu_i) = f(v) + f(vu_i) + f(u_i)$$

$$= 2i + \left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil$$

- Bobot sisi (vu_i) untuk $i = a$ jika $n = 4$

$$wt\ (vu_i) = i + \left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil + a + 2$$

- Bobot sisi (vu_i) untuk $i = a$ jika $n > 4$

$$wt\ (vu_i) = i + \left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil + a + 3$$

- Bobot sisi (vu_i) untuk $i = a + 1$

$$wt\ (vu_i) = \left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil + f(vu_i) + a + 3$$

- Bobot sisi (vu_i) untuk $a + 2 \le i \le n - 1$

$$wt\ (vu_i) = \left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil + f(vu_i) + f(u_i)$$

- Bobot sisi (vu_i) untuk $i = n$

$$wt\ (vu_i) = 3\left(\left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil\right)$$

Untuk $n \equiv 2\ (mod\ 3)$

1. Bobot titik (u_i)

- Bobot titik (u_i) untuk $1 \le i \le a-2$

$$wt\ (u_i) = 2i + 1$$

- Bobot titik (u_i) untuk $i = a - 1, a$

$$wt\ (u_i) = i + f(vu_i) + 1$$

- Bobot titik (u_i) untuk $i = a + 1$

$$wt\ (u_i) = a + \left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil + f(vu_i) - 2$$

- Bobot titik (u_i) untuk $a + 2 \le i \le n - 1$

$$wt\ (u_i) = f(u_i) + f(vu_i) + \left(\left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil - 3\right)$$

- Bobot titik (u_i) untuk $i = n$

$$wt\ (u_i) = 3\left(\left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil\right) - 2$$

2. Bobot titik (v_i)

- Bobot titik (v_i) untuk $i = 1$

$$wt\ (v_i) = \left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil + 5$$

- Bobot titik (v_i) untuk $2 \le i \le a-2$

$$wt\ (v_i) = 2i + 4$$

- Bobot titik (v_i) untuk $i = a - 1$ jika $n = 5$

$$wt\ (v_i) = i + a + \left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil + 5$$

- Bobot titik (v_i) untuk $i = a - 1$ jika $n > 5$

$$wt\ (v_i) = i + a + \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil + 7$$

- Bobot titik (v_i) untuk $i = a$ jika $n = 5$

$$wt\ (v_i) = i + a + \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil + 3$$

- Bobot titik (v_i) untuk $i = a$ jika $n > 5$

$$wt\ (v_i) = i + a + \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil + 3$$

- Bobot titik (v_i) untuk $i = a + 1$ jika $n = 5$

$$wt\ (v_i) = f(v_i) + f(vv_i) + 3\left(\left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil\right) - 8$$

- Bobot titik (v_i) untuk $i = a + 1$ jika $n > 5$

$$wt\ (v_i) = f(v_i) + f(vv_i) + 3\left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil - 9$$

- Bobot titik (v_i) untuk $a + 2 \leq i \leq n - 2$

$$wt\ (v_i) = 4\left(\left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil\right) + f(v_i) - 5$$

- Bobot titik (v_i) untuk $i = n - 1$

$$wt\ (v_i) = f(v_i) + f(vv_i) + 3\left(\left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil\right) - 4$$

- Bobot titik (v_i) untuk $i = n$ jika $n = 5$

$$wt\ (v_i) = 5\left(\left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil\right) - 5$$

- Bobot titik (v_i) untuk $i = n$ jika $n > 5$

$$wt\ (v_i) = 5\left(\left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil\right) - 3$$

3. Bobot titik (v)

$$wt\ (v_i) = v + \sum_{i=1}^{n} f(vv_i) + f(vu_i)$$

4. Bobot sisi (vv_i)

- Bobot sisi (vv_i) untuk $1 \leq i \leq a - 2$

$$wt\ (vv_i) = 2i + \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil + 1$$

- Bobot sisi (vv_i) untuk $i = a - 1$ jika $n = 5$

$$wt\ (vv_i) = i + \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil + a + 4$$

- Bobot sisi (vv_i) untuk $i = a - 1$ jika $n > 5$

$$wt\ (vv_i) = \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil + (a + 4) + i$$

- Bobot sisi (vv_i) untuk $a + 1 \leq i \leq n - 1$

$$wt\ (vv_i) = \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil + f(vv_i) + f(v_i)$$

- Bobot sisi (vv_i) untuk $i = n$

$$wt\ (vv_i) = 3\left(\left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil\right) - 3$$

5. bobot sisi $(v_i v_{i+1})$

- Bobot sisi $(v_i v_{i+1})$ untuk $1 \le i \le a-1$

$$wt\ (v_i v_{i+1}) = 2i + 2$$

- Bobot sisi $(v_i v_{i+1})$ untuk $i = a$ jika $n = 5$

$$wt\ (v_i v_{i+1}) = 2i + \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil$$

- Bobot sisi $(v_i v_{i+1})$ untuk $i = a$ jika $n > 5$

$$wt\ (v_i v_{i+1}) = 2i + \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil - 1$$

- Bobot sisi $(v_i v_{i+1})$ untuk $a+1 \le i \le n-2$

$$wt\ (v_i v_{i+1}) = f(v_i) + \left(\left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil - 1\right) + f(v_{i+1})$$

- Bobot sisi $(v_i v_{i+1})$ untuk $i = n-1$

$$wt\ (v_1 v_n) = f(v_i) + f(v_1 v_n) + f(v_n)$$

$$= f(v_i) + \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil + f(v_{i+1})$$

- Bobot sisi $(v_i v_{i+1})$ untuk $i = n$

$$wt\ (v_1 v_n) = 2\left(\left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil\right) - 2$$

6. Bobot sisi $(v_i u_i)$

- Bobot sisi $(v_i u_i)$ untuk $1 \le i \le a$

$$wt\ (v_i u_i) = 2i + 1$$

- Bobot sisi $(v_i u_i)$ untuk $i = a+1$

$$wt\ (v_i u_i) = f(v_i) + \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil + a - 2$$

- Bobot sisi $(v_i u_i)$ untuk $a+2 \le i \le n-1$

$$wt\ (v_i u_i) = f(v_i) + \left(\left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil - 3\right) + f(u_i)$$

- Bobot sisi $(v_i u_i)$ untuk $i = n$

$$wt\ (v_n u_n) = 3\left(\left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil\right) - 4$$

7. Bobot sisi (vu_i)

- Bobot sisi (vu_i) untuk $1 \le i \le a-2$

$$wt\ (vu_i) = 2i + \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil$$

- Bobot sisi (vu_i) untuk $a-1 \le i \le n-1$

$$wt\ (vu_i) = \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil + f(vu_i) + f(u_i)$$

- Bobot sisi (vu_i) untuk $i = n$

$$wt\ (vu_i) = 3\left(\left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil\right) - 2$$

Berdasarkan rumus bobot titik dan sisi diatas dapat dilihat bahwa bobot semua titik dan sisi berbeda. Hal ini menunjukkan bahwa pelabelan tersebut memenuhi pelabelan total tak teratur total. Pelabelan f memetakan dari $V(F_n) \cup E(F_n)$ ke $\left\{1,2,3, \dots, \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil\right\}$, karena label terbesarnya adalah

 ISSN 1979-8911

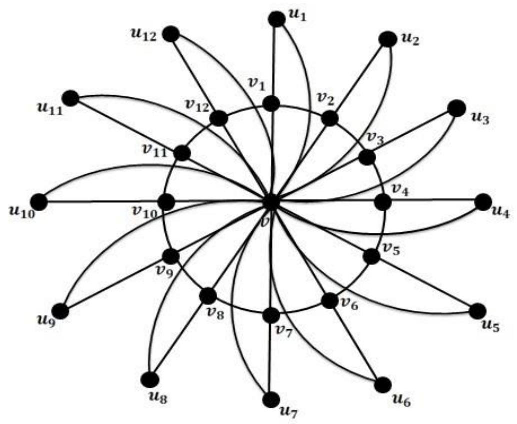
$\left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil$, sehingga terbukti bahwa batas atas dari nilai $ts(F_n)$ adalah $\left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil$. Atau dapat ditulis

$$ts(F_n) \le \left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil \qquad (2)$$

Berdasarkan persamaan 1 dan 2, maka dapat disimpulkan bahwa $ts(F_n) = \left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil$.

Contoh

Sebagai ilustrasi, berikut ini akan diberikan pelabelan total tak teratur total pada graf bunga F_n untuk $n = 12$ berdasarkan pelabelan total tak teratur total yang telah dijelaskan.



Gambar 2. Graf bunga (F_{12})

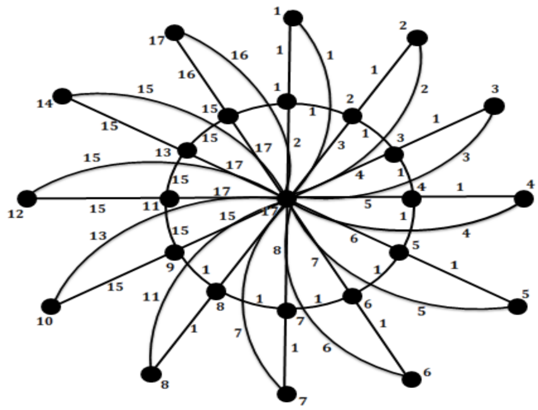
Dengan himpunan titik dan sisinya sebagai berikut,

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}; u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_{10}, u_{11}, u_4\} \cup \{v\}$

$E = \{vv_1, vv_2, vv_3, vv_4, vv_5, vv_6, vv_7, vv_8, vv_9, vv_{10}, vv_{11}, vv_{12}, v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_7v_8, v_8v_9, v_9v_{10}, v_{10}v_{11}, v_{12}v_{12}, v_{12}v_1; u_1v_1, u_2v_2, u_3v_3, u_4v_4, u_5v_5, u_6v_6, u_7v_7, u_8v_8, u_9v_9, u_{10}v_{10}, u_{11}v_{11}, u_{12}v_{12}; vu_1, vu_2, vu_3, vu_4, vu_5, vu_6, vu_7, vu_8, vu_9, vu_{10}, vu_{11}, vu_{12}\}$

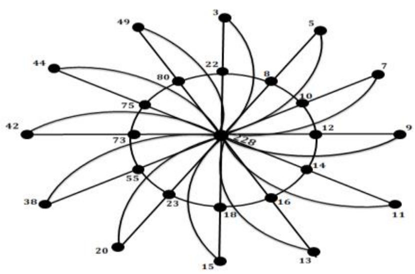
Langkah selanjutnya akan diberi label masing-masing titik dan sisinya berdasarkan algoritma pelabelan yang telah dipaparkan sebelumnya, untuk $n = 12$, maka $a = \frac{\left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil - 1}{2} = \frac{17-1}{2} = 8.$

Sehingga diperoleh hasil pelabelan pada graf bunga (F_{12}) yang ada di gambar 3



Gambar 3. Pelabelan total tak teratur total pada graf bunga F_{12}

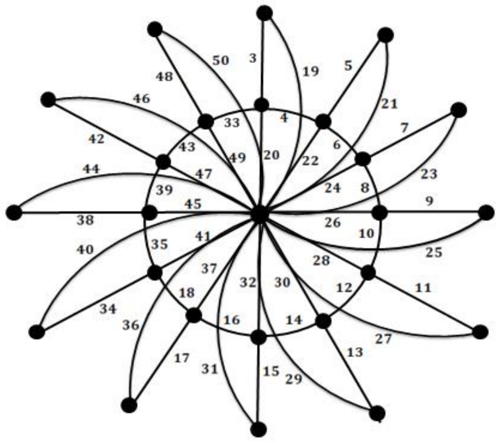
Untuk hasil bobot pada setiap titiknya ada pada gambar 4 berikut ini:



Gambar 4. Bobot titik pada graf bunga F_{12}.

ISSN 1979-8911

Dan untuk hasil bobot pada setiap sisinya ada pada gambar 5 berikut ini:



Gambar 3.5 Bobot sisi pada graf bunga F_{12}.

Kesimpulan

Paper ini membahas tentang pelabelan total tak teratur total pada graf bunga (F_n). Dapat disimpulkan bahwa berdasarkan teorema 1 dan 4, diperoleh batas bawah dari $ts(F_n)$ adalah $\left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil$, dan setelah diberikan pelabelan total tak teratur total pada graf bunga (F_n), diperoleh batas atas dari $ts(F_n)$ adalah $\left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil$, karena batas bawah dari graf bunga (F_n) sama dengan batas atas dari graf bunga (F_n), maka dapat diperoleh nilai total tak teratur total dari graf bunga (F_n) adalah $\left\lceil\frac{4n+2}{3}\right\rceil$.

Referensi

[1] A. Ahmad, K.M. Awan, I. Javaid, dan Slamin, Total vertex irregularity strength of wheel related graphs, *Australasian Journal of Combinatorics*, volume (5): 147-156, 2011.

[2] A. Ghofur, *Pewarnaan Titik Pada Graf Yang Berkaitan Dengan Sikel*, Skripsi, Universitas Islam Negeri Malang, Malang, 2008.

[3] B. Riadi, *Menemukan Pelabelan Graceful Pada Graf Lintasan* (P_n) *Dengan Panjang* n *Menggunakan Program PHP Dan Javaschripi*, Skripsi, Universitas Negeri Malang, Malang, 2009.

[4] C.C. Marzuki, A.N.M. Salman, dan M. Miller, On the total irregularity strength of cycles and paths. Diterima untuk dipublikasikan Far East Journal of Mathematical Sciences.

[5] K. S. Diana, Ramdani, R., M.Si., dan Julaeha, S., M.Si., *Pelabelan Total Tak Teratur Sisi dan Pelabelan Total Tak Teratur Titik*, Studi Literatur, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Gunung Djati, Bandung, 2012.

[6] K. S. Diana, Ramdani, R., M.Si., dan Julaeha, S., M.Si., *Pelabelan Total Tak Teratur Total pada Graf Helm dan Graf Gabungan Saling Lepas dari Graf Roda*. SKRIPSI, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Gunung Djati, Bandung, 2013.

[7] M. Baca, S. Jendrol, M. Miller, and J. Ryan, On Irregular Total Labellings. *Discrete Mathematics*, 307(2007): 1378-1388, 2005.

[8] Permana, Jaka., S.Si., *Pelabelan Total Tak Teratur Total Pada Graf Hasil Kali Comb Antara Graf Lingkaran Dan Graf Lintasan*. SKRIPSI, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Gunung Djati, Bandung, 2014.

[9] R. Munir, *Matematika Diskrit*, Penerbit Informatika, Bandung, 2012.

[10] K. Wijaya and Slamin, Total vertex irregular labelings of wheels, fans, suns, and Friendship graphs, *J. Combin. Math. Combin. Comput*. 65, 103-112, 2008.

[11] S. Fajariyah, *Graf Dual (Dual Graph) Dari Graf Roda* (W_n) *Dan Graf Helm Tertutup* (cH_n), Skripsi, Universitas Islam Negeri Malang, Malang, 2009.

Siti Julaeha*

Mathematics Department, Faculty of Science and Technology
UIN Sunan Gunung Djati Bandung
siti.julaeha83@uinsgd.ac.id

Ita Luspitasari

Mathematics Department, Faculty of Science and Technology
UIN Sunan Gunung Djati Bandung
Itasari663@gmail.com

Esih Sukaesih

Mathematics Department, Faculty of Science and Technology
esih_s@yahoo.com

*Corresponding author