ISSN 1979-8911

ESTIMASI *CONFIDENCE INTERVAL* BOOTSTRAP UNTUK ANALISIS DATA SAMPEL TERBATAS

Asep Solih A*

Abstrak

Dalam analisis data seringkali peneliti ingin mengetahui karakteristik data penelitian seperti jenis distribusi, mean, median atau varians data. Kendala dalam menentukan karakteristik data biasanya ketika data yang tersedia di lapangan sedikit, sehingga tidak cukup untuk dilakukan analisis secara parametrik. Tulisan ini membahas estimasi confidence interval (CI) dengan menggunakan bootstrap untuk estimasi nilai parameter mean, median, dan varians data juga dalam menentukan kecocokan distribusi (goodness of fit) data. Tiga metoda CI bootstrap yaitu percentile CI, standard normal CI, dan bias-corrected percentile CI digunakan dan dibandingkan untuk mengetahui perbedaan nilai estimasi parameternya. Metoda bootstrap parametrik digunakan untuk menentukan estimasi parameter CI data berdistribusi Eksponensial, Gamma, Log-Normal, dan Weibull yang akan digunakan untuk mengetahui distribusi data yang cocok. Langkah-langkah estimasi CI dan kecocokan model distribusi dibuat, selanjutnya digunakan dalam menganalisis data waktu kerusakan mesin untuk sampel yang kecil. Hasil menunjukkan bahwa estimasi CI bootstrap dengan ketiga metoda memberikan nilai yang relatif sama, dilihat dari batas bawah dan batas atas yang dihasilkan, maupun selisih interval yang kurang dari 5%, selain itu dapat juga ditentukan pemilihan distribusi yang terbaik dengan melihat nilai MSE (mean square error) terkecil, sehingga dapat ditentukan estimasi CI parameter bootstrap untuk distribusi tersebut.

Kata Kunci : metode bootstrap, sampel kecil, distribusi waktu kerusakan, confidence interval

 ISSN 1979-8911

Pendahuluan

Dalam beberapa penelitian berdasarkan data waktu kerusakan, peneliti seringkali dihadapkan dalam permasalahan sedikitnya data yang tersedia di lapangan, terutama untuk data dengan objek yang mahal atau waktu kerusakan yang lama terjadi . Data yang sedikit menyebabkan sulitnya analisis data terutama untuk menentukan bentuk distribusi data dan estimasi parameternya, karena tidak cukup untuk melakukan analisis parametrik pada data yang kecil. Salah satu metoda yang dapat digunakan untuk melakukan analisis data dengan kendala sampel data yang kecil adalah dengan menggunakan metoda bootstrap. Bootstrap adalah teknik resampling yang cukup populer, Idenya adalah sebuah distribusi sampling dapat ditaksir dengan menghasilkan sejumlah besar sampel baru dari sampel asli. Dengan kata lain, bootstrap memperlakukan sampel seolah-olah itu adalah populasi. Salah satu kajian bootstrap adalah membangun interval kepercayaan (*Confidence Interval*) untuk setiap parameter distribusi.

Tulisan ini membahas penggunaan teknik bootstrap untuk membangun interval kepercayaan untuk mean, median, dan varians dari distribusi yang tidak diketahui dengan menggunakan ukuran sampel kecil. Ukuran karakteristik data mean sangat berguna untuk memberikan gambaran ukuran pemusatan dari data, demikian juga untuk median sebagai ukuran lokasi yang biasanya digunakan untuk bentuk distribusi yang tidak simetris [4], varians berguna untuk mengetahui keragaman data.

Selanjutnya hasil estimasi CI digunakan untuk melakukan estimasi parameter distribusi waktu kerusakan. empat jenis distribusi yang sering dipakai dalam anaisis data kerusakan yaitu distribusi eksponensial, gamma, log-normal, dan Weibull ditetapkan untuk dilakukan penaksiran terhadap parameter-parameternya.

Metoda Bootsrap dan *Confidence Interval*

Bootstrap pertamakali diperkenalkan oleh Efron pada tahun 1979, beberapa kajian buku dan jurnal telah banyak membahas mengenai metoda bootstrap diantaranya Hall [5], Efron [8], Shao [9], Davison and Hinkley [3], Mackinnon [11] dan Athreya [1], dan yang lainnya. Terdapat dua pendekatan metoda bootsrap yaitu bootstrap parametrik dan non parametrik.

Secara umum penentuan estimasi parameter bootstrap dapat dilakukan dengan langkah sebagai berikut [12]:

1. Misalkan $X = (X_1, X_2, \dots . X_n)$ adalah sampel yang i.i.d. dari distribusi F , dimana $F(x) = P(X \le x)$
2. Kita dapat peroleh beberapa parameter $\theta(F)$ dari distribusi ini (misalkan mean, median, variance, dll), dan misalkan estimator $\ddot{\theta}(\ddot{F}_n)$ atau $\ddot{\theta} = \ddot{\theta}(\{X_1, X_2, \dots . X_n\})$, dimana $\ddot{F}_n$ adalah distribusi empirik dengan $\hat{F}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I(X_j) \le x$
3. *Generate* sampel bootstrap (resampling), dapat dilakukan dengan dua pendekatan :

   a. Metoda bootstrap non parametrik : $X_{ij}^{*} \sim^{iid} \hat{F}_n$; $i = 1,2, \dots, B$, $j = 1,2, \dots, n$

   b. Metoda bootstrap parametrik : $X_{ij}^{\#} \sim^{iid} G_{\hat{\lambda}}$; $i = 1,2, \dots, B$, $j = 1,2, \dots, n$ dengan $G_{\hat{\lambda}} = G(.|X)$ sebuah elemen dari $\{G_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ dari distribusi. Parameter λ diestimasi dengan metoda maximum likelihood
4. Hitung replikasi bootstrap

   $\hat{\theta}(X_i^{*}) = \hat{\theta}(\{X_{i1}^{*}, X_{i2}^{*}, \dots, X_{in}^{*}\})$; $i = 1,2, \dots, B$ untuk bootstrap non parametrik

   $\hat{\theta}(X_i^{\#}) = \hat{\theta}(\{X_{i1}^{\#}, X_{i2}^{\#}, \dots, X_{in}^{\#}\})$; $i = 1,2, \dots, B$ untuk bootstrap parametrik

5. Tentukan estimasi parameter bootstrap (misalkan untuk mean, varians, dan median)

   a. mean bootstrap :

   $\hat{\theta}^{\times} = \frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B}\hat{\theta}(X_i^{\times})$

   b.varians bootstrap :

   $\widehat{Var}^{\times} = \frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B}\left[\hat{\theta}(X_i^{\times}) - \hat{\theta}^{\times}\right]^2$

   c. median bootstrap :

   $\ddot{\theta}_{(B+1)/2}^{\times} = \ddot{\theta}\left(X_{(i)}^{\times}\right)$;

   $X_{(i)}^{\times} = \text{sampel terurut}$

Tulisan ini akan mengkaji lebih khusus kepada penaksiran *confidence interval (CI)* parameter mean, median dan varians dengan menggunakan pendekatan bootstrap non parametrik, sedangkan untuk menentukan penaksiran CI parameter distribusi dilakukan dengan pendekatan bootstrap parametrik.

Tiga metoda CI yang digunakan yaitu *: percentile CI, standard normal CI, dan bias-corrected percentile CI*. Teori yang lebih detail untuk tiga metoda ini telah dikaji lebih dalam dalam beberapa tulisan [8], [6], dan [3]. Edwards [7] secara detail telah menguraikan algoritma dari metoda ini.

Bootstrap percentile CI diperoleh berdasarkan pada kuantil distribusi bootstrap yang diperoleh dengan rumusan berikut :

$$\left[\hat{\theta}^{*}_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \hat{\theta}^{*}_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right] \qquad (1)$$

dimana $\hat{\theta}^{*}_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ dan $\hat{\theta}^{*}_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$ adalah kuantil dari estimasi distribusi bootstrap

Bootstrap standard CI diperoleh dengan rumusan berikut :

$$\left[\hat{\theta} - z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\widehat{se}_{\hat{\theta}}\ , \hat{\theta} + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\widehat{se}_{\hat{\theta}}\ \right] \qquad (2)$$

Dimana $\widehat{se}_{\hat{\theta}}$ adalah standar error yang diperoleh dari varians estimasi bootstrap $\hat{\theta}$, dan $z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ adalah kuantil ke - $\frac{\alpha}{2}$ dari distribusi normal standar.

Terakhir, bias-corrected percentile CI didefinisikan sebagai jumlah perbedaan antara median estimasi bootstrap $\hat{\theta}^{*b}$ dan estimasi $\hat{\theta}$ dari data asli [8]. Estimasi

ISSN 1979-8911

konstanta bias-correction dinotasikan dengan $\hat{z}_0$, yang didefinisikan

$$\hat{z}_0 = \Phi^{-1}\left(\frac{\#(\hat{\theta}^{*b} < \hat{\theta})}{B}\right)$$

dimana Φ^{-1} merupan invers distribusi normal standar kumulatif dan # adalah "banyaknya". Sehingga percentil ke-$100(1-\alpha)$ bias-corrected persentil CI dapat diperoleh sebagai berikut :

$$\left[\hat{\theta}^{*\alpha_1}, \hat{\theta}^{*\alpha_2}\right] \qquad (3)$$

dimana $\alpha_1 = \Phi\left(2\hat{z}_0 + z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)$ dan $\alpha_1 = \Phi\left(2\hat{z}_0 + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right)$ dengan Φ adalah distribusi normal standar kumulatif.

Estimasi Parameter Distribusi

Dalam tulisan ini akan dibahas tiga buah distribusi peluang kontinu yang umumnya digunakan dalam analisis data kerusakan dan keandalan produk yaitu : distribusi Gamma, distribusi Weibull, dan distribusi log-normal. Dengan menggunakan maksimum likelihood estimation (MLE), dapat diperoleh nilai estimasi parameter dari masing-masing distribusi.

Fungsi densitas peluang Eksponensial adalah sebagai berikut :

$$f(x|\beta) = \frac{1}{\beta}e^{-\frac{x}{\beta}}$$

dimana $x \geq 0, \beta > 0$ dengan β adalah parameter *rate*.

Ekspektasi, varians, median, dan estimasi parameter untuk distribusi Eksponensial adalah sebagai berikut : $E(X) = \beta$, $Var(X) = \beta^2$, $med = \beta(ln2)$, dan $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Fungsi densitas peluang Gamma adalah sebagai berikut :

$$f(x|\alpha,\beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}$$

dimana $x \geq 0, \alpha, \beta > 0$ dengan α adalah parameter bentuk (shape) dan β adalah parameter skala.

Ekspektasi, varians, median, untuk distribusi Gamma adalah sebagai berikut : $E(X) = \alpha\beta$, $Var(X) = \alpha\beta^2$, pendekatan median Gamma menurut Banneheka & Ekanayake [2] adalah $med = \frac{(3\hat{\alpha}_{me}-0.8)}{(3\hat{\alpha}_{me}+0.2)}\bar{x}$ dengan $\hat{\alpha}_{me} = \frac{(\bar{x})^2}{\frac{1}{n}\sum_1^n x_i^2 - (\bar{x})^2}$.

 ISSN 1979-8911

Estimasi parameter distribusi Gamma dengan menggunakan MLE diperoleh dengan menyelesaiakn memaksimumkan fungsi log likehood $\ln(L) = (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) - n\alpha - n\alpha\cdot\ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\alpha}\right) - n\ln\Gamma(\alpha)$ terhadap α dengan $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$.

Metoda numerik dengan menggunakan newton raphson dapat dilakukan untuk menentukan solusi estimasi kedua parameter tersebut.

Fungsi densitas peluang Log-Normal adalah sebagai berikut :

$$f(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

dimana $x > 0, \sigma^2 > 0, -\infty < \mu < \infty$ dengan σ^2 adalah parameter bentuk (shape) dan μ adalah parameter lokasi.

Ekspektasi, median dan varians untuk distribusi lognormal adalah $E(X) = e^{\mu+\frac{\sigma}{2}}$, $med = e^{\mu}$, dan $Var(X) = \left(e^{\sigma^2}-1\right)e^{\mu+\frac{\sigma}{2}}$.

Estimasi parameter fungi Log Normal dengan menggunakan metoda MLE diperoleh $\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)}{n}$ dan $\sigma^2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2}{n}}$

Terakhir, fungsi densitas peluang Weibull adalah sebagai berikut :

$$f(x|\alpha,\beta) = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}}$$

dimana $x \geq 0, \alpha, \beta > 0$ dengan α adalah parameter bentuk (shape) dan β adalah parameter skala.

Ekspektasi, median, dan varians untuk distribusi Weibull adalah $E(X) = \beta\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$, $med = \beta(Ln2)^{\frac{1}{\alpha}}$ dan $Var(X) = \beta^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right]$

Estimasi parameter Weibull dapat diperoleh dengan menentukan solusi secara numerik, dari persamaan $\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\hat{\alpha}}\ln x_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\hat{\alpha}}} - \frac{1}{\hat{\alpha}}\right] = \frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n}$ dengan $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\hat{\alpha}}}{n}$ dengan digunakan metoda newton raphson .

Estimasi *Confidence Interval* Bootstrap

Dengan menggunakan metoda bootstrap yang telah diuraikan dalam bagian 2 dan beberapa persamaan dalam bagian 3, maka dapat dilakukan langkah-langkah estimasi CI bootstrap sebagai berikut :

1. Tentukan data sampel $x_1, x_2, \ldots, x_n$

ISSN 1979-8911

2. Tentukan estimasi θ, yaitu $\hat{\theta} = \{\bar{x}, md, s^2\}$, masing-masing adalah mean, median, dan standar deviasi
3. Lakukan *resampling* n sampel dengan pengembalian $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$
4. Tentukan estimasi $\hat{\theta}^* = \{\bar{x}^*, md^*, s^{2*}\}$
5. Ulang langkah 3 dan 4 sampai B kali, diperoleh $\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, \dots, \hat{\theta}_B^*$
6. Tentukan estimasi titik parameter bootstrap $\hat{\bar{\theta}}^*$
7. Tentukan estimasi CI untuk estimasi mean, median, dan varians dengan metoda *percentile CI*, *standard CI*, dan *bias corrected percentile CI*. Berturut-turut dengan menggunakan persamaan (1), (2), dan (3)
8. Dari data sampel lakukan estimasi parameter Θ distribusi peluang dengan menggunakan MLE untuk distribusi Eksponensial, Gamma , Lognormal, dan Weibull
9. Lakukan *resampling* n sampel dengan pengembalian $y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*$ berdasarkan $\hat{\Theta}$ yang diperoleh dari langkah 8, untuk setiap distribusi.
10. Tentukan estimasi parameter $\hat{\Theta}^*$ untuk setiap distribusi
11. Ulang langkah 9 dan 10 sampai B kali, diperoleh $\hat{\Theta}_1^*, \hat{\Theta}_2^*, \dots, \hat{\Theta}_B^*$
12. Tentukan estimasi CI untuk parameter $\hat{\Theta}^*, \widehat{E^*}(X), \widehat{Md^*}(X)$, dan $\widehat{V^*}(X)$ sebagai ekspektasi, median, dan varians bootstrap untuk setiap distribusi
13. Lakukan langkah (1) sampai dengan (12) sebanyak *M* kali untuk melihat variabilitas nilai estimasi CI bootstrap yang dihasilkan, diperoleh estimasi CI $\widehat{E_j^*}(X), \widehat{Md_j^*}(X)$, dan $\widehat{V_j^*}(X)$ dimana $j = 1,2, \dots, M$
14. Tentukan estimasi CI setiap parameter $\hat{\theta}^*$ dengan metoda terbaik yang diperoleh dalam langkah (7) dengan melihat rata-

 ISSN 1979-8911

rata dengan standar deviasi terkecil.

15. Hitung nilai MSE untuk setiap estimasi parameter CI dengan menentukan seluruh error hasil estimasi CI hasil langkah (14) dengan antara hasil langkah (13) dengan hasil estimasi CI pada langkah (14)
16. Pilih distribusi dengan melihat nilai MSE terkecil.
17. Tentukan estimasi parameter CI distribusi $\hat{\theta}^*$ hasil langkah (12)

Secara umum langkah di atas dapat dibagi kedalam empat bagian, langkah 1-7 merupakan bagian dari bootstrap non parametrik untuk menentukan taksiran mean, median, dan varians data. Langkah 8-12 merupakan bagian dari bootstrap parametrik dengan mengasumsikan bahwa data mengikuti distribusi Eksponensial, Gamma, Log normal dan Weibull. Bagian ketiga pada langkah 13-14 merupakan langkah iterasi untuk mendapatkan variabilitas dan rata-rata nilai dari hasil estimasi CI pada proses bootstrap. Bagian terakhir yaitu langkah 15-17 adalah langkah penentuan distribusi dan estimasi parameter distribusi yang sesuai.

Data dan Hasil

Data yang digunakan dalam tulisan ini adalah data waktu kerusakan 9 mesin *gear box* yang terdapat dalam *dump truck.* Dalam apalikasinya dump truck digunakan untuk mengangkut batu bara di daerah pertambangan. Waktu operasional yang padat ditambah kondisi lingkungan yang cukup berat menyebabkan cepat rusaknya komponen *dump truck* tersebut. *Gear box* adalah bagain terpenting dari mesin dump truck, sehingga kerusakan pada komponen ini dapat menyebabkan kerusakan-kerusakan pada komponen lainnya. Pengamatan waktu kerusakan pada gear box dijadikan sebagai data utama untuk dianalisis. Tabel 1 menunjukkan sampel data kerusakan 9 mesin *gear box dump truck.*

Tabel 1. Data Waktu Kerusakan Gear Box Dump Truck

Mesin	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
t (tahun)	0.516	0.915	0.291	0.457	0.291	0.427	0.425	0.509	0.693

Dari data sampel dapat ditentukan masing-masing nilai maksimum 0.915, nilai minimum 0.291, rentang 0.624, nilai mean, median dan varians berturut-turut adalah sebagai berikut : 0.503, 0.457, dan 0.196

Selanjutnya dilakukan perhitungan estimasi *confidence interval* untuk data waktu kerusakan, dengan tiga metoda penaksiran dan tiga nilai yang ditaksir.

Perbedaan nilai estimasi dengan banyaknya resampling B yang berbeda dapat dilihat dalam Gambar 1.

Gambar 1 menunjukkan perbedaan nilai estimasi bootsrap untuk setiap nilai B yang berbeda (B = 10, 20,....1000), terlihat bahwa banyaknya resampling tidak memberikan hasil yang berbeda untuk nilai estimasi yang dihasilkan, rentang untuk setiap nilai estimasi kurang dari 5%, baik antar besarnya B yang berbeda, maupun setiap nilai estimasi B dengan masing-masing statistik data yaitu mean median dan varians.

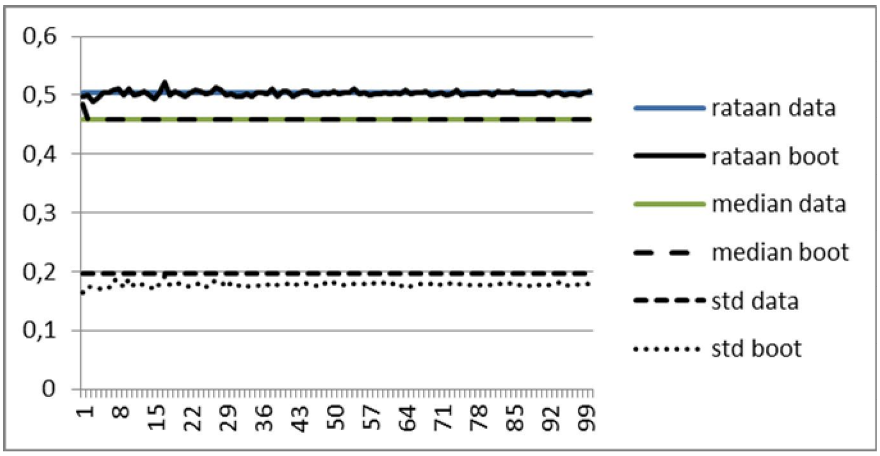
Untuk menentukan estimasi interval resampling bootstrap dilakukan dengan nilai $\alpha = 0.05$, dengan besarnya nilai B =1000, dan banyaknya iterasi untuk melihat variabilitas

hasil estimasi bootstrap sebanyak M=50.

Tabel 2. merupkan estimasi titik yang diperoleh dari data sampel dan rata-rata estimasi titik bootstrap diperoleh hasil yang sama untuk median, dan untuk nilai mean dan varians memiliki perbedaan hasil yang tidak signifikan. Tabel 3. menunjukkan hasil rata-rata estimasi CI masing-masing untuk mean, median dan varians dari ketiga metoda estimasi CI bootstrap yang berbeda. Terlihat bahwa secara umum nilai estimasi CI yang diperoleh realtif sama dengan panjang interval yang tidak jauh berbeda. Nilai standard deviasi (SD) menunjukkan keragaman hasil estimasi untuk iterasi proses bootstrap untuk batas bawah (BB) maupun batas atas (BA). Nilai SD terkecil dari setiap metoda diperoleh perbedaan untuk estimasi CI, berturut-turut standard normal CI untuk estimasi mean denagn nilai SD yang sama untuk BB dan BA sebesar 0.0027, sedangkan estimasi median niali SD terkecil diperoleh dari metoda bias-corrected, dan SD terkecil untuk varians masing-masing metoda persentil dan standard normal untuk BB dan BA. Rata-rata SD untuk seluruh estimasi interval berturut-turut adalah 0.0206 untuk percentile CI, 0.0035 untuk standard nornal CI, dan 0.0046 untuk bias corrected CI, Secara umum rata-rata SD yang terkecil dihasilkan oleh metoda standard normal, sehingga untuk hasil estimasi dengan metoda standard normal CI yang dipilih sebagai estimasi CI bootstrap.

Gambar 1.

Grafik hasil estimasi bootsrap untuk B berbeda (B=10,20,...1000)



 ISSN 1979-8911

Tabel 2. Hasil Estimasi Titik Data Sampel dan Bootstrap

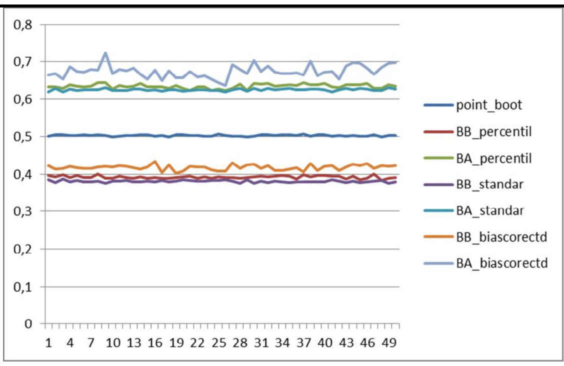
	mean	median	varians
Data Sampel	0.5032	0.4578	0.0388
Bootstrap	0,5033	0,4578	0,0344
	(SD=0.0019)	(SD=0.0000)	(SD=0.0005)

Tabel 3. Hasil Estimasi *CI*

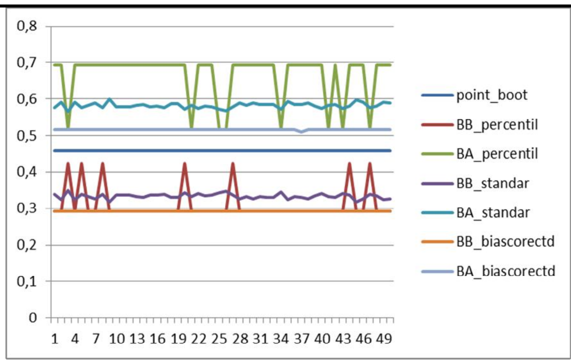
Statistik	Metoda CI	Confidence Interval (CI)		BA - BB	Standar Deviasi BB	Standar Deviasi BA
		Batas Bawah (BB)	Batas Atas (BA)			
Mean ($\bar{x}$)	percentile	0,3929	0,6341	0,2392	0,0036	0,0057
	standard normal	0,3815	0,6248	0,2433	0,0027	0,0027
	bias-corrected	0,4184	0,6735	0,2551	0,0069	0,0168
Median (*md*)	percentile	0,3105	0,6646	0,3541	0,0472	0,0660
	standard normal	0,3338	0,5817	0,2479	0,0071	0,0071
	bias-corrected	0,2914	0,5166	0,2252	0,0000	0,0010
Varians (s^2)	percentile	0,0055	0,0700	0,0645	0,0004	0,0011
	standard normal	0,0033	0,0743	0,0710	0,0006	0,0007
	bias-corrected	0,0081	0,0790	0,0709	0,0005	0,0026

Dalam Gambar 2. menunjukkan iterasi estimasi CI bootstrap sebanyak 50 kali, dengan hasil yang bervariasi, kecuali untuk estimasi median dengan metoda *bias corrected*, diperoleh hasil estimasi yang sama seperti terlihat dalam gambar 2b.

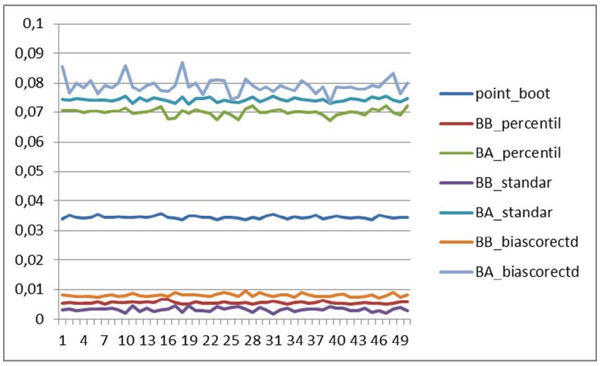
ISSN 1979-8911



a. iterasi CI mean



b. iterasi CI median



c.iterasi CI varians

Gambar 2. Iterasi Estimasi CI Bootstrap

Dengan menggunakan langkah bootstrap parametrik dengan asumsi distribusi data diketahui dapat ditentukan estimasi parameter CI bootstrap untuk parameter distribusi dari empat jenis distribusi masing-masing distribusi Eksponensial, Gamma, Log Normal dan Weibull. Hasil estimasi CI persentil diperoleh hasil seperti terlihat dalam Tabel 4.

Estimasi parameter yang diperoleh dari distribusi Eksponensial menunjukkan nilai parameter rate dengan rentang yang cukup lebar, demikian juga untuk parameter bentuk (shape) maupun skala (scale). Estimasi CI untuk parameter distribusi Log-Normal dan Weibull menunjukkan rentang yang cukup kecil.

Tabel 4. Estimasi CI Bootstrap Untuk Parameter Distribusi

Distribusi	Estimasi Parameter	Confidence Interval (CI)	
		Batas Bawah (BB)	Batas Atas (BA)
Eksponensial	$\hat{\beta}$	0,1654	1,0525
Gamma	$(\hat{\alpha};\hat{\beta})$	(76,2796 ; 0,0064)	(4,0248 ; 0,1370)
Log-Normal	$(\hat{\mu};\hat{\sigma})$	(-1,0840 ; 0,3157)	(-0,4175 ; 0,3859)
Weibull	$(\hat{\alpha};\hat{\beta})$	(0,3754 ; 3,3950)	(0,3859 ; 3,8992)

Tabel 5. Estimasi CI Ekspektasi, Median dan Varians Distribusi

Estimasi	Distribusi	Confidence Interval (CI)		BA - BB
		Batas Bawah (BB)	Batas Atas (BA)	
E(X)	Eksponensial	0,16535	1,05248	0,88713
	Gamma	0,48193	0,55130	0,06937
	Log-Normal	0,35692	0,71657	0,35965
	Weibull	0,33757	0,67218	0,33461
Median	Eksponensial	0,11462	0,72953	0,61491
	Gamma	0,38475	0,44029	0,05554
	Log-Normal	0,33826	0,65872	0,32046
	Weibull	0,33119	0,67225	0,34106
V(X)	Eksponensial	0,02743	1,10869	1,08126
	Gamma	0,00308	1,43740	1,43432
	Log-Normal	0,01500	0,10330	0,0883
	Weibull	0,01721	0,04373	0,02652

Estimasi CI untuk nilai ekspektasi, median, dan varians distribusi berdasarkan pada nilai estimasi bootsrap, dengan langkah perhitungan seperti yang telah dijelaskan dalam bagian .4, diperoleh hasil seperti terlihat dalam Tabel 5.

Langkah selanjutnya adalah menentukan distribusi yang memiliki nilai mean square error (MSE) terkecil berdasarkan pada penghitungan *error* hasil estimasi bootsrap parametrik yang menghasilkan nilai estimasi CI untuk ekspektasi E(X), median, dan varians V(X) untuk setiap distribusi, dengan hasil estimasi bootstrap non parametrik yang menghasilkan nilai estimasi CI untuk mean $(\bar{x})$, median (med), dan varians (s^2). Hasil perbandingan MSE dapat dilihat pada Tabel 6. Dari nilai MSE diperoleh bahwa distribusi Weibull memeiliki nilai MSE yang terkecil, artinya bahwa dapat diestimasi bahwa data berdistribusi Weibull. Dengan demikian dapat ditentukan bahwa nilai estimasi CI parameter distribusi adalah estimasi untuk Weibull sebagaimana terdapat dalam Tabel 4.

Tabel 6. Nilai MSE Estimasi CI Distribusi

Distribusi	MSE
Eksponensial	0.2294
Gamma	0.3414
Log-Normal	0.0041
Weibull	0.0025

Kesimpulan

Metoda bootstrap dapat dijadikan sebagai alternatif dalam menyelesaikan anailis data waktu kerusakan untuk sampel kecil, dengan metoda ini beberapa estimasi parameter dapat dilakukan seperti mean, median dan varians. Dari kasus perhitungan data real menunjukkan bahwa ketiga jenis estimasi confidence interval memberikan hasil yang relaitf sama untuk ketiga paramater yang diestimasi. Alternatif estimasi parameter distribusi dapat diketahui dengan mengkaitkan hasil estimasi bootstrap dengan ekspektasi, varians, dan median fungsi distribusi kerusakan yang telah diketahui, dengan terlebih dahulu melakukan penaksiran parameter distribusi dengan menggunakan metoda bootstrap parametrik

Referensi

[1] Athreya (2006) Athreya, K. B., Lahiri. S. N., (2006). Measure theory and probability theory. Springer, New York.

[2] Banneheka & Ekanayake (2009), A new point estimator for the median of gamma distribution, Vidyodaya J. of sc: (201J9) Vol. /-1. f'f' 95-/03

[3] Davison, A.C., Hinkley. D. V., (1997). Bootstrap methods and their application. Cambridge University Press.

[4] D.Collette (1994), Modelling Survival Data in Medical Research, New York: Chapman & Hall

[5] Hall.P (1992), The Bootstrap and Edgeworth Expansion. Springer, New York.

[6] DiCiccio dan Efron (1996). Bootstrap confidence intervals. Stat.Sci. 11(3):189–212.

[7] Edwards, D.J. 2004. An applied statistical reliability analysis of the internal bond of medium density fiberboard. MS thesis, The Univ. Of Tennessee at Knoxville. 135 pp.

[8] Efron, B., Tibshirani, R. (1994). Introduction to the Bootstrap. Chapman & Hall.

[9] Shao, J. Tu. D (1996). The Jacknife and Bootsrap . Springer-Verlag, New York.

[10] Janssen, A., Pauls,T., (2003) How do Bootstrap and Permution tests work? The Annals of Statistics. 31, 3, 768-806.

[11] Mackinnon, J. G. (2002), Bootstrap inference in econometrics. The Canadian Journal of Economics, 35 4. 615-645.

[12] Zwanzig, S. (2007). Computer Intensive Statistical Methods. Lecture Note. Dept. of Mathematics. Uppsala University.

*UIN Sunan Gunung Djati Bandung
aasolih@uinsgd.ac.id