ISSN 1979-8911

APLIKASI PROSES POISSON PERIODIK (STUDI KASUS: ANTRIAN NASABAH BANK BRI)

Rini Cahyandari, Agus Tinus Setianto
Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sunan Gunung Djati Bandung
Jl. AH. Nasution 105 Cibiru Bandung, 40614
e-mail: rcahyandari@yahoo.com

ABSTRAK

Pada umumnya aplikasi proses Poisson mengasumsikan bahwa banyaknya kejadian pada suatu interval waktu yang panjangnya *t* dan tidak saling tumpang tindih, memiliki distribusi yang sama. Sehingga laju kejadian yang dinotasikan dengan λ dianggap konstan, dan prosesnya dinamakan proses Poisson homogen. Akan tetapi, sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari bahwa laju kejadian λ konstan sebenarnya kurang tepat dikarenakan laju kejadian biasanya berupa fungsi dari waktu *t* yang disebut dengan fungsi intensitas $\lambda(t)$ dan prosesnya dinamakan proses Poisson nonhomogen. Selanjutnya, pada contoh kasus kedatangan pelanggan, fungsi intensitasnya lebih tepat dianggap fungsi periodik sehingga prosesnya dinamakan proses Poisson periodik. I Wayan Mangku (2002) secara teoritis telah menemukan estimator yang berguna untuk menduga $\lambda(t)$, fungsi intensitas global dan periodenya secara non parametris karena bentuk fungsinya tidak diketahui. Dalam aplikasi proses Poisson periodik permasalahan yang timbul adalah bagaimana menduga karakteristik-karakteristik proses Poisson periodik seperti fungsi intensitas $\lambda(t)$, fungsi intensitas global yang merupakan laju rata-rata keseluruhan, dan periode. Sebagai studi kasus, akan diambil data antrian nasabah bank BRI Cabang Ujung Berung Bandung, di mana pengamatan dilakukan selama 2 hari dan sistem yang digunakan yaitu sistem pelayanan empat loket (*Single Channel Multiserver)*

Keyword: Proses Poisson Nonhomogen, Poisson Periodik, Fungsi Intensitas, Model Antrian *Single Channel Multiserver*, Uji Chi Kuadrat

ABSTRACT

In general, the application of the Poisson process assumes that the number of occurrences in a time interval of length t and do not overlap , have the same distribution. So that the rate of event is denoted by λ assumed to be constant , and the process is called homogeneous Poisson process . However , in daily life that the event rate constant λ is not appropriate because the event rate is usually a function of time t is called the intensity function λ (t) and the process is called a nonhomogeneous Poisson process . Furthermore , in the case of customer arrival , the intensity function more appropriately considered a periodic function so that the process is called a Poisson process periodically. I Wayan Mangku (2002) theoretically have found useful estimator to estimate λ (t) , the global intensity function and its period is non-parametric because the function is unknown . In the application periodic Poisson process, problem that arises is how to suppose the characteristics such periodic Poisson process intensity function λ (t) , which is a function of the intensity of the global average rate overall , and period . As a case study , would have taken the data queue of bank customers BRI Branch Ujunng Berung Bandung , where the observations were made for 2 days and the system used is four counter service system (Single Channel Multiserver)

Keyword: Nonhomogeneous Poisson Process, Periodic Poisson Process, Intensity Fuction, Queue Model (*Single Channel Multiserver*), Chi-Square Test

1. Pendahuluan

Pada umumnya aplikasi proses Poisson di dunia nyata mengasumsikan bahwa banyaknya kejadian pada interval waktu yang panjangnya t, yang tidak saling tumpang tindih memiliki distribusi yang sama. Sehingga laju kejadian pada interval waktu berapapun, yang dinotasikan λ, dianggap konstan (homogen). Secara teoritis proses Poisson ini disebut proses Poisson homogen. Akan tetapi, sering dijumpai bahwa asumsi λ homogen kurang tepat. Laju kejadian pada interval waktu yang panjangnya t dan tidak saling tumpang tindih biasanya berupa fungsi dari waktu t, yang disebut fungsi intensitas $\lambda(t)$. Proses Poisson ini disebut proses Poisson nonhomogen. Akan tetapi pada aplikasi kedatangan pelanggan, umumnya kedatangannya lebih tepat dianggap periodik. Fungsi intensitasnya adalah fungsi periodik dan prosesnya disebut sebagai proses Poisson periodik.

Dalam aplikasi proses Poisson periodik permasalahan yang timbul adalah bagaimana menduga karakteristik-karakteristik proses Poisson periodik seperti fungsi intensitas $\lambda(t)$, fungsi intensitas global yang merupakan laju rata-rata keseluruhan, dan periode. I Wayan Mangku (2002) telah menemukan estimator yang berguna untuk menduga $\lambda(t)$, fungsi intensitas global dan peiodenya secara non parametris karena bentuk fungsinya tidak diketahui. Karena penemuan estimator fungsi intensitas lokal, fungsi intensitas global dan periode lebih terfokus pada segi teoritisnya, maka perlu dibahas tentang aplikasi dalam kehidupan sehari-hari. Oleh karenanya pada makalah ini akan dibahas tentang penentuan laju kedatangan λ dan intensitas global . Studi Kasus yang diambil adalah data antrian nasabah bank BRI Cabang Ujung Berung Bandung.

Permasalahan dalam makalah ini dibatasi, antara lain:

1. Studi kasus yang digunakan adalah data antrian nasabah bank BRI Cabang Ujung Berung Bandung yang memenuhi asumsi yang dibutuhkan.
2. Lama pengamatan yang dilakukan yaitu selama 2 hari (20-21 Juni 2012) dan

perhari pengamatan dilakukan selama 2 jam (09.00-11.00) .

3. Sistem yang digunakan yaitu sistem pelayanan empat loket (*Single Channel Multiserver)*
4. Analisa data dilakukan dengan menggunakan *software* MATLAB

2. Proses Poisson Homogen

Definisi 1:

Proses menghitung $\{N(t), t \geq 0\}$ dapat dikatakan sebagai proses Poisson homogen dengan laju λ, $\lambda > 0$ jika:

(i) $N(0) = 0$

(ii) Proses memiliki kenaikan bebas

(iii) Banyaknya kejadian pada sebuah interval yang panjangnya t berdistribusi Poisson dengan rataan λt. Sehingga untuk semua $s,t \geq 0$

$$P\{N(t+s) - N(s) = n\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

di mana $n = 0,1,\ldots$

Definisi 2:

Proses menghitung $\{N(t), t \geq 0\}$ dapat dikatakan sebagai proses Poisson homogen dengan laju λ, $\lambda > 0$ jika:

(i) $N(0) = 0$

(ii) Proses memiliki kenaikan bebas dan stasioner

(iii) $P\{N(h) = 1\} = \lambda h + o(h)$

(iv) $P\{N(h) \geq 2\} = o(h)$

3. Proses Poisson Nonhomogen

Berdasarkan intensitasnya, proses Poisson dibagi dua, yaitu Poisson homogen jika intensitasnya konstan dan dinotasikan dengan λ, dan Poisson nonhomogen jika intensitasnya berupa fungsi terhadap waktu, dikenal dengan istilah fungsi intensitas dan dinotasikan dengan $\lambda(t)$.

Definisi 3:

Proses menghitung $\{N(t), t \geq 0\}$ dapat dikatakan sebagai proses Poisson nonhomogen dengan fungsi intensitas $\lambda(t), t \geq 0$ jika:

(i) $N(0) = 0$

(ii) $\{N(t), t \geq 0\}$ memiliki kenaikan bebas

(iii) $P\{N(t+h) - N(t) \geq 2\} = o(h)$

(iv) $P\{N(t+h) - N(t) = 1\} = \lambda(t)h + o(h)$

4. Proses Poisson Periodik

Definisi 4:

Proses Poisson periodik adalah suatu proses Poisson dengan fungsi intensitas berupa fungsi periodik, di mana fungsi intensitas lokal $\lambda(t)$ mendefinisikan laju kedatangan pada waktu t**.** Misalkan N adalah suatu proses Poisson Periodik dengan fungsi intensitas λ yang diamati pada suatu interval $[0, n]$. Pembatasan hanya dibatasi untuk kasus periode τ dari fungsi intensitas λ yang diketahui. Karena N adalah suatu proses Poisson periodik yang memiliki fungsi intensitas λ dengan periode $\tau > 0$, dimana τ diketahui, maka berlaku

$$\lambda = \lambda(s) = \lambda(s + k\tau)$$

untuk semua $s \in \mathbb{R}$ dan $k \in \mathbb{Z}$, dengan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat. Konstanta terkecil τ yang memenuhi persamaan di atas disebut periode dari fungsi intensitas λ tersebut.

Definisi 5:

Intensitas lokal dari suatu proses Poisson nonhomogen N dengan fungsi intensitas λ pada titik $s \in \mathbb{R}$ adalah $\lambda(s)$, yaitu nilai λ di s. Fungsi intensitas lokal λ dari proses Poisson ini didefinisikan dengan:

$$\frac{1}{2h_n} N([s - h_n, s + h_n])$$

Definisi 6:

Misalkan $N(0, n])$ adalah proses Poisson pada interval $[0, n]$. Fungsi intensitas global θ dari proses Poisson ini didefinisikan dengan:

$$\theta = \lim_{n \to \infty} \frac{EN([0, n])}{n}$$

jika limit di atas ada. Jika nilai limit tidak ada maka pendekatan yang dipakai pada penaksiran intensitas global dari suatu proses Poisson ialah menaksir rata-rata terjadinya kejadian proses Poisson tersebut dalam selang waktu $[0, n]$.

Secara matematis, intensitas global pada $[0, n]$ dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\theta = \frac{1}{n} N([0, n])$$

5. Model Antrian M/M/c : FIFO/~/~

Model antrian M/M/c : FIFO/~/~ disebut juga sistem antrian saluran ganda, untuk melayani para nasabah dipasang sebanyak c fasilitas pelayanan secara paralel sehingga nasabah dalam antrian dapat dilayani oleh lebih dari fasilitas pelayanan. Model antrian ini dibuat untuk menurunkan tingkat antrian dalam sistem dengan membuat saluran pekerja lebih efektif sehingga mempercepat tingkat pelayanan karena pada model ini menambahkan jumlah saluran pelayanan sebanyak c, dan karakteristik dari model ini yaitu kedatangan Poisson, waktu pelayanan Eksponensial, dan antrian tak hingga.

Parameter antrian:

a. Kecepatan rata-rata kedatangan (λ)
b. Kecepatan rata-rata pelayanan (μ)
c. Probabilitas tidak ada pelanggan dalam sistem (P_0)

ISSN 1979-8911

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!}\right] + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^c}{c!} \cdot \frac{c\mu}{c\,\mu - \lambda}}$$

d. Waktu sibuk (ρ)

$$\rho = \frac{\lambda}{c\,\mu}$$

e. Jumlah pelanggan yang menunggu dalam antrian (L_q)

$$L_q = P_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{c!} \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

f. Jumlah pelanggan yang menunggu dalam sistem (L_s)

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

g. Waktu rata-rata menunggu seorang pelanggan dalam antrian (W_q)

$$W_s = W_q + \frac{1}{\lambda}$$

h. Waktu rata-rata menunggu seorang pelanggan dalam sistem (W_s)

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

Distribusi Waktu Antar Kedatangan

Pendekatan distribusi tingkat kedatangan dalam antrian secara teoritis yang lazim digunakan adalah distribusi Poisson, di mana model matematis yang telah dirumuskan untuk distribusi ini adalah:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

di mana: e = 2,71…

λ = μ

X = nilai tengah

Frekuensi harapan

$$E_i = nP$$

di mana: P = probabilitas

n = jumlah sampel

Distribusi Waktu Pelayanan

Distribusi frekuensi tingkat pelayanan merupakan frekuensi lama pelayanan terhadap pelanggan pada proses pelayanan. Lama pelayanan diketahui dari selisih waktu keluar dari pelayanan dengan waktu masuk untuk dilayani. Waktu keluar yang dimaksud merupakan waktu akhir dilayani oleh kasir. Secara eksplisit adalah sebagai berikut:

$$t = t_i - t_j$$

di mana:

t = lamanya pelayanan atau waktu pelayanan

t_i = waktu akhir dilayani

t_j = waktu masuk pelayanan

Lama pelayanan akan berbeda pada tiap-tiap pelanggan, atau lama pelayanan sama dengan selisih waktu masuk pelanggan dengan waktu keluar dari pelayanan. Untuk itu pada tabel distribusi frekuensi, tingkat pelayanan adalah jumlah pelanggan yang dilayani pada interval waktu tertentu.

Pendekatan pelayanan secara teoritis yang lazim digunakan adalah distribusi Eksponensial. Secara matematis kemungkinan pelanggan yang dilayani dalam waktu t tertentu adalah:

$$Exp = \frac{\Delta t}{t_s}\, e^{\left(\frac{-t}{t_s}\right)}$$

di mana:

Exp = fungsi waktu pelayanan pada waktu *t* dan juga *f(t)* ini digunakan sebagai probabilitas

Δt = interval waktu pelayanan

t_s = rata-rata waktu pelayanan.

Uji Kecocokan (Chi-Square)

Untuk mengetahui cocok tidaknya antara distribusi frekuensi hasil pengamatan dengan hasil model-model yang telah dikembangkan, *K. Pearson* memprakirakan kecocokan tersebut dengan pendekatan *Chi Kuadrat*. Model *Chi Kuadrat* yang telah dikembangkann tersebut adalah sebagai berikut:

$$Chi - Kuadrat(\alpha_i^2) = \frac{(f_i - f_1)^2}{f1}$$

di mana:

f_i= frekuensi Hasil Pengamatan

f_1= frekuensi hasil teoritis

Sedangkan jumlah $Chi - Kuadrat(\alpha_i^2)$ adalah:

$$jumlahChi - Kuadrat(\alpha_i^2) = \sum_{i=1}^{i=n}(\alpha_i^2)$$

Selanjutnya jumlah *Chi Kuadrat* digunakan untuk mengetahui apakah distribusi frekuensi hasil pengamatan dan distribusi frekuensi teoritis tersebut cocok atau tidak. Untuk itu perlu hipotesis awal:

H_0 : Distribusi frekuensi hasil pengamatan sama dengan distribusi frekuensi teoritis

H_1 : Distribusi frekuensi hasil pengamatan tidak sama dengan distribusi frekuensi teoritis

dengan daerah penolakan adalah $\propto$ = 5%. Pernyataan H_0 diterima jika $\alpha^2_{hitung} < \alpha^2_{(\alpha,dk)}$

di mana:

$\alpha^2_{(\alpha,dk)}$ = Jumlah Chi Kuadrat hasil tabel

dk = Derajat kebebasan sama dengan k-1

k = banyak kelas.

6. Studi Kasus

Secara umum sistem antrian pada transaksi nasabah di Bank BRI Ujung Berung Bandung dapat digambarkan sebagai berikut:

1. Terdapat 4 *teller* yang aktif dalam melayani transaksi baik penyetoran uang maupun pengambilan uang nasabah.
2. Kapasitas antriannya tidak terbatas.
3. Sistem antriannya menggunakan disiplin antrian FIFO (*first in first out).*
4. Nasabah yang datang langsung dapat mengambil nomor antrian di mesin antrian. Disinilah mulai diperhitungkan

ISSN 1979-8911

waktu kedatangan nasabah (nasabah masuk ke sistem antrian).

5. Setelah nasabah memasuki ruangan, nasabah membentuk suatu antrian atau baris tunggu. Baris tunggu ini terjadi di *teller* yang ada, diwakili oleh nomor antrian yang dikeluarkan oleh mesin antrian otomatis dari pihak Bank BRI Cabang Ujung Berung Bandung. Nasabah menunggu sampai nomor antriannya dipanggil untuk melakukan transaksi. Tahap ini merupakan waktu yang diperhitungkan sebagai waktu tunggu nasabah di dalam sistem.
6. Tahap selanjutnya yaitu proses transaksi. Pada tahap ini dicatat waktu yang dibutuhkan seorang *teller* dalam melayani setiap nasabah.
7. Setelah proses transaksi selesai, nasabah meninggalkan ruangan (sistem).

7. Uji Distribusi

a. Distribusi Waktu Antar Kedatangan

Langkah-Langkah Uji Distribusi Waktu Kedatangan :

- Mengurutkan Data

Tabel 1 Waktu Antar Kedatangan yang Telah Diurutkan (Rabu, 20 juni 2012)

1	4	4	4	5	5	9	10	10	13
15	15	20	23	24	25	25	26	27	27
30	30	30	32	35	35	35	40	45	45
46	55	64	65	65	65	69	70	71	73
75	78	79	79	80	80	82	85	86	89
90	90	90	92	93	104	106	114	119	130
130	131	137	147	148	151	176	180	197	201
204	207	208	251	253	295	361			

- Banyak Data $n = 77$

  Banyak Kelas

  $K = 1 + 3.3 \log n$

  $= 1 + 3.3 \, log \, 77 = 7{,}3 \approx 7$

- Interval Kelas $IK =$

  $\frac{DataTerbesar - DataTerkecil}{K} = \frac{361-1}{7} =$

  $51.428 \approx 51$

Tabel 2 Data Distribusi Frekuensi Kedatangan (Rabu, 20 Juni 2012)

No	IK	x_i	f_i	$f_i x_i$
1	0 – 51	25.5	31	790,5
2	52 – 103	77.5	24	1860
3	104 – 155	129.5	11	8024.5
4	156 – 207	181.5	6	1089
5	208 – 259	233.5	3	700.5
6	260 – 311	285.5	1	285.5
7	312 – 363	337.5	1	337.5
Jumlah			77	6487.5

Pengujian Distribusi Waktu Antar Kedatangan Menggunakan Uji Chi-Kuadrat:

- Hipotesis

ISSN 1979-8911

H_0 : Data berdistribusi Eksponensial

H_1 : Data tidak berdistribusi Eksponensial

- Taraf signifikan alpha (α): 0.05
- Derajat Kebebasan (dk): $K - 1 = 7 - 1 = 6$
- Menentukan Kriteria pengujian

  H_0 Ditolak jika

  $\mathcal{X}^2{}_{hitung} \geq \mathcal{X}^2{}_{tabel}$

  H_0 Diterima jika

  $\mathcal{X}^2{}_{hitung} < \mathcal{X}^2{}_{tabel}$

- Distribusi probabilitas Eksponensial :

  $$EXP = \frac{\Delta t}{t_s} e^{-\frac{t}{t_s}}$$

  di mana :

  $\Delta t = IK = 52$

  $$t_s = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{6487.5}{77} = 84.25 \approx 84$$

  $t = x_i = nilai\ tengah$

  $e = 2.71 \ldots$

- Frekuensi Teoritis

  $E_i = n \cdot EXP_i$

- Chi-Kuadrat

  $$\mathcal{X}^2 = \sum \frac{(f_i - E_i)^2}{E_i}$$

Tabel 3 Data Uji Chi-Kuadrat Frekuensi Kedatangan (Rabu, 20 Juni 2012)

IK	x_i	f_i	$f_i x_i$	EXP	E_i	$\mathcal{X}^2$
0 – 51	25.5	31	790.5	0.46	35.19	0.50
52 – 103	77.5	24	1860	0.25	18.95	1.35
104 – 155	129.5	11	1424.5	0.13	10.20	0.06
156 – 207	181.5	6	1089	0.07	5.49	0.05
208 – 259	233.5	3	700.5	0.04	2.96	0.00
260 – 311	285.5	1	285.5	0.02	1.59	0.22
312 – 363	337.5	1	337.5	0.01	0.86	0.02
Jumlah		77	6487.5	0.98		2.20

Jadi diperoleh $\mathcal{X}^2{}_{hitung} = 2.20$

- Chi-Kuadrat tabel

  $$\mathcal{X}^2{}_{tabel} = \mathcal{X}^2{}_{\alpha;dk} = \mathcal{X}^2{}_{0.05;6} = 12.592$$

- Kesimpulan :

  Dapat dilihat bahwa

  $\mathcal{X}^2{}_{hitung} = 2.20$ dan

  $\mathcal{X}^2{}_{tabel} = 12.592$

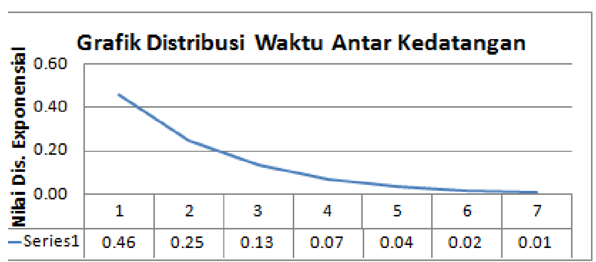
  Artinya :

  $$\mathcal{X}^2{}_{hitung} < \mathcal{X}^2{}_{tabel}$$

  $$2.20 < 12.59$$

  Maka H_0 diterima.

Jadi, pola waktu antar kedatangan berdistribusi Eksponensial.



Gambar 1 Grafik Distribusi Waktu Antar Kedatangan (Rabu, 20 Juni 2012)

b. Distribusi Waktu Pelayanan

Langkah-Langkah Uji Distribusi Waktu Pelayanan :

ISSN 1979-8911

- Mengurutkan Data

Tabel 4 Data Waktu Pelayanan Periode 5 Menit yang Telah Diurutkan (Rabu, 20 Juni 2012)

1	1	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	3	3	3	4
4	4	5	5	6	6	6	6

- Banyak data $n = 24$
- Range

  R = data terbesar – data terkecil

  = 6 – 1 = 5
- Banyak Kelas
- $K = 1 + 3.3 \log n$

  $= 1 + 3.3\ log\ 24 = 5.55 \approx 6$
- Interval Kelas

  $I = \frac{R}{K} = \frac{5}{6} = 0.83\ 3 \approx 1$

Tabel 5 Data Distribusi Frekuensi Pelayanan (Rabu, 20 Juni 2012)

No	IK	x_i	f_i	$f_i x_i$
1	1	1	2	2
2	2	2	10	20
3	3	3	3	9
4	4	4	3	12
5	5	5	2	10
6	6	6	4	24
Jumlah			24	77

Pengujian Distribusi Waktu Pelayanan Menggunakan Uji Chi-Kuadrat:

- Hipotesis

  H_0 : Data berdistribusi Poisson

  H_1 : Data tidak berdistribusi Poisson
- Taraf signifikan alpha (α): 0.05
- Derajat Kebebasan

  (dk): $K - 1 = 6 - 1 = 5$
- Menentukan Kriteria pengujian

  H_0 Ditolak jika

  $$\mathcal{X}^2{}_{hitung} \geq \mathcal{X}^2{}_{tabel}$$

  H_0 Diterima jika

  $$\mathcal{X}^2{}_{hitung} < \mathcal{X}^2{}_{tabel}$$
- Distribusi probabilitas Poisson : $P = P_i(x_i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!}$

  Di mana :

  $e = 2.71 \ldots$

  $\lambda = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{77}{24} = 3.208 \approx 3$

  $x_i = nilai\ tengah$
- Frekuensi Teoritis $E_i = n \cdot P_i(x_i)$
- Chi-Kuadrat $\mathcal{X}^2 = \sum \frac{(f_i - E_i)^2}{E_i}$

Tabel 6 Data Uji Chi-Kuadrat Frekuensi Pelayanan (Rabu, 20 Juni 2012)

No	IK	(x_i)	(f_i)	$(f_i x_i)$	$P_i(x_i)$	E_i	$\mathcal{X}^2$
1	1	1	2	2	0.15	3.58	0.70
2	2	2	10	20	0.22	5.38	3.97
3	3	3	3	9	0.22	5.38	1.05
4	4	4	3	12	0.17	4.03	0.26
5	5	5	2	10	0.10	2.42	0.07
6	6	6	4	24	0.05	1.21	6.43
Jumlah			24	77	0.92		12.50

Jadi diperoleh $\mathcal{X}^2{}_{hitung} = 12.50$

- Chi-Kuadrat tabel

  $\mathcal{X}^2{}_{tabel} = \mathcal{X}^2{}_{\alpha;dk} = \mathcal{X}^2{}_{0.05;6}$

  $= 12.592$

- Kesimpulan :

  Dapat dilihat bahwa

  $\mathcal{X}^2{}_{hitung} = 12.50$ dan

  $\mathcal{X}^2{}_{tabel} = 12.592$

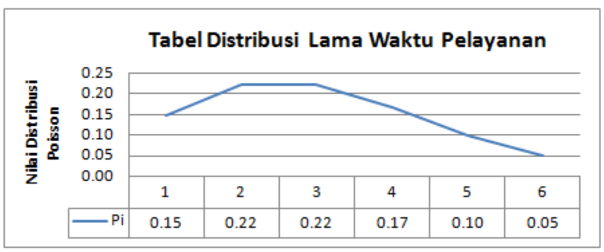
  Artinya :

  $\mathcal{X}^2{}_{hitung} < \mathcal{X}^2{}_{tabel}$

  $12.50 < 12.59$

  Maka H_0 diterima.

Jadi, pola waktu pelayanan berdistribusi Poisson.



Gambar 2 Grafik Distribusi Waktu Pelayanan (Rabu, 20 Juni 2012)

8. Analisis Model

Dari hasil pengujian diperoleh waktu antar kedatangan berdistribusi Eksponensial dan waktu pelayanan berdistribusi Poisson. Dengan demikian dapat diketahui bahwa model untuk sistem antrian tersebut yaitu *(M/M/4): FIFO/∞/∞)*. Artinya adalah sistem antrian dengan pola kedatangan dan pelayanan bersifat *Memoriless*, fasilitas pelayanan 4, disiplin pelayanan *FIFO*, fasilitas antrian tak terhingga, dan sumber input tak terhingga.

Jika $c = 4$, maka analisisnya sebagai berikut:

1. Rata-rata nasabah yang datang per satuan waktu

   $\lambda = \frac{banyak\ pelanggan\ yang\ datang}{lama\ waktu\ pengamatan}$

   $= \frac{77}{120}$

   $= 0.64 \approx 1\ orang/menit$

2. Rata-rata nasabah yang dilayani per satuan waktu

   $\mu = \frac{1}{rata-rata\ waktu\ pelayanan}$

   $rata - rata\ waktu\ pelayanan$

   $= \frac{lama\ pelayanan}{waktu\ pengamatan}$

   $= \frac{119}{120} = 0.99$

   Maka $\mu = \frac{1}{rata-rata\ waktu\ pelayanan}$

   $= \frac{1}{0.99}$

   $= 1.01 \approx 1\ orang/menit$

3. Peluang teller sibuk

   $$\rho = \frac{\lambda}{c\,\mu} = \frac{1}{4.1} = \frac{1}{4} = 0.25$$

4. Peluang tidak ada nasabah dalam sistem

   Jika $\lambda < c\,\mu$, maka

   $$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!}\right] + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^c}{c!} \cdot \frac{c\,\mu}{c\,\mu - \lambda}}$$

ISSN 1979-8911

di mana $\lambda = 1, c = 4, \mu = 1$

maka peluang tidak ada nasabah dalam sistem adalah:

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{4-1} \frac{(\frac{1}{1})^n}{n!}\right] + \frac{(\frac{1}{1})^4}{4!} \cdot \frac{4.1}{4.1 - 1}} = \frac{1}{\frac{49}{18}}$$

$$= 0.36$$

5. Rata-rata nasabah yang diharapkan menunggu dalam antrian

$$L_q = \frac{P_0 \, (\frac{\lambda}{\mu})^c}{c!} \cdot \frac{\rho}{(1 - \rho)^2}$$

$$= \frac{0.36 \, (\frac{1}{1})^1}{4!} \cdot \frac{0.25}{(1 - 0.25)^2}$$

$$= 0.06 \approx 0$$

Jadi, rata-rata tidak ada nasabah yang ngantri di teller.

6. Rata-rata waktu menunggu dalam antrian

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$= \frac{0.06}{1} = 0.06/menit$$

7. Rata-rata waktu di dalam sistem

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$= 0.06 + \frac{1}{1} = 0.06 + 1 = 1.06$$

8. Rata-rata nasabah yang ada dalam sistem antrian

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$= 0.06 + \frac{1}{1} = 0.06 + 1$$

$$= 1.06 \approx 1 \; orang/menit$$

Jika $c = 3$, model yang digunakan yaitu *(M/M/3):(FIFO/∞/∞)* maka analisis sebagai berikut:

1. Peluang teller sibuk

$$\rho = \frac{\lambda}{c \, \mu} = \frac{1}{3.1}$$

$$= \frac{1}{3} = 0.33$$

2. Peluang tidak ada nasabah dalam sistem

Jika $\lambda < c \, \mu$, maka

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!}\right] + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^c}{c!} \cdot \frac{c \, \mu}{c \, \mu - \lambda}}$$

di mana $\lambda = 1, c = 3, \mu = 1$

maka peluang tidak ada nasabah dalam sistem adalah:

$$P_0 = \frac{1}{\left[\frac{(\frac{1}{1})^0}{0!} + \frac{(\frac{1}{1})^1}{1!} + \frac{(\frac{1}{1})^2}{2!}\right] + + \frac{(\frac{1}{1})^3}{3!} \cdot \frac{3.1}{3.1 - 1}} =$$

$$\frac{1}{2.75} = 0.36$$

Jika $c = 5$, model yang digunakan yaitu *(M/M/5):(FIFO/∞/∞)*. Maka analisis modelnya sebagai berikut:

1. Peluang teller sibuk

$$\rho = \frac{\lambda}{c \, \mu}$$

$$= \frac{1}{5.1} = \frac{1}{5} = 0.20$$

2. Peluang tidak ada nasabah dalam sistem

ISSN 1979-8911

Jika $\lambda < c\,\mu$, maka

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!}\right] + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^c}{c!} \cdot \frac{c\,\mu}{c\,\mu - \lambda}}$$

di mana $\lambda = 1, c = 5, \mu = 1$

maka peluang tidak ada nasabah dalam sistem adalah:

$$P_0 = \frac{1}{\left[\frac{(\frac{1}{1})^0}{0!} + \frac{(\frac{1}{1})^1}{1!} + \frac{(\frac{1}{1})^2}{2!} + \frac{(\frac{1}{1})^3}{3!} + \frac{(\frac{1}{1})^4}{4!}\right] + \frac{(\frac{1}{1})^5}{5!} \cdot \frac{5.1}{5.1 - 1}} =$$

$$\frac{1}{2.67} = 0.37$$

Dari ketiga analisis di atas dapat dilihat perbandingannya untuk masing-masing fasilitas pelayanannya (c) yang ditunjukan pada tabel 7

Tabel 7 Optimalisasi Antrian

(Rabu, 20 Juni 2012)

No	c	λ	μ	ρ	P_0
1	3	1	1	0.33	0.36
2	4	1	1	0.25	0.36
3	5	1	1	0.20	0.37

Sehingga dapat disimpulkan bahwa untuk kondisi antrian nasabah di hari-hari biasa (normal) pelayanan dengan tiga *teller* lebih optimal dan dapat menguntungkan pihak Bank dikarenakan tidak terlalu banyak teller dan nasabah pun tidak terlalu mengantri.

9. Uji Intensitas Lokal dan Intensitas Global

Intensitas lokal di sekitar s dapat dihampiri dengan,

$$\frac{1}{2h_n} N([s - h_n, s + h_n])$$

Di mana:

h_n : banyak kejadian pada waktu ke s $s -$ h_n: banyaknya kejadian interval waktu s dan $s - 1$

$s +$ h_n: banyaknya kejadian interval waktu s dan $s + 1$

Tabel 8 Hasil Uji Intensitas Lokal (Rabu, 20 Juni 2012)

ISSN 1979-8911

Waktu Periode 5 menit	Banyak (h_n)	Intensitas Loka
00.00-00.00	0	0
00.00-05.00	4	1.0
05.01-10.01	2	0.5
10.02-15.02	6	0.5
11.03-20.03	2	2.0
20.04-25.04	6	0.5
25.05-30.05	6	0.3
30.06-35.06	3	0.3
35.07-40.07	1	0.4
40.08-45.08	2	1.3
45.09-50.09	2	0.3
50.10-55.10	2	0.0
55.11-60.11	2	0.1
60.12-65.12	2	0.7
65.13-70.13	2	0.5
70.14-75.14	2	0.7
75.15-80.15	3	0.5
80.16-85.16	5	0.2
85.17-90.17	1	0.2
90.18-95.18	3	0.5
95.19-100.19	2	0.3
100.20-105.20	5	0.1
105.21-110.21	4	0.0
110.22-115.22	4	0.5
115.23-120.23	6	0.5

Untuk intensitas global dikarenakan nilai limitnya tidak ada, maka nilai dari intensitas globalnya yaitu :

$$\text{è} = \frac{1}{n} N([0, n])$$

$$= \frac{1}{120} 75 = 0.625 \approx 1$$

Maka nilai dari intensitas globalnya adalah $1\ orang/menit$.

Dilakukan dengan cara yang sama untuk hari pengamatan kedua, yaitu tanggal 21 Juni 2012. Akan tetapi, pada makalah ini hasilnya tidak dicantumkan.

10. Kesimpulan

1. Hasil pengamatan memperoleh model antrian *M/M/4 : FIFO/∞/∞* yaitu model antrian dengan pola kedatangan dan pelayanan bersifat *Memoriless*, fasilitas pelayanan c dengan c = 4, disiplin pelayanan *FIFO*, fasilitas antrian tak terhingga, dan sumber input tak terhingga. Dengan menggunakan model tersebut diperoleh pelayanan dengan tiga *teller* lebih optimal dan dapat menguntungkan pihak bank dikarenakan tidak terlalu banyak server dan pelanggan pun tidak terlalu mengantri.
2. Berdasarkan hasil analisis, penaksir fungsi intensitas lokal tersebut memang benar dan baik untuk jumlah pengamatan yang

besar, yang berarti panjang interval pengamatan makin besar. Nilai dari masing-masing intensitas lokal tiap periode pun tidak jauh dari nilai intensitas globalnya, di mana nilai dari intensitas pelayanannya adalah 1 orang/menit dengan periode = 5 menit.

Daftar Pustaka

[1] Farid, Tati. *Penduga Komponen Periodik dari Fungsi Intensitas Proses Poisson Periodik dengan Trend Fungsi Pangkat.* Program Magister Institut Pertanian Bogor, Bogor. 2008

[2] Hamdi, A. Taha. *Riset Operasi Suatu Pengantar, Jilid Dua.* Tanggerang: Binarupa Aksara. 1996

[3] Kakiay, Thomas J. *Dasar Teori Antrian*, ANDI, Yogyakarta. 2004

[4] Mangku, I. W. *Panduan Belajar Mandiri Proses Stokastik.* Bogor: Departemen Matematika FMIPA-IPB. 2005

[5] Ross, Sheldon. *Stochastic Processes (Second Edition)*. Jhon Wiley and Sons Inc. 1996

[6] Siagan P. Penelitian dan Operasional. UI press: Jakarta. 1986

[7] Syamsuri. Thesis: *Penduga Turunan Pertama Dari Fungsi Intensitas Suatu Proses Poisson Periodik.* Program Magister UIN Jakarta, Jakarta. 2008

[8] Taufik Halim. *Estimasi Fungsi Intensitas Dan Periode Poisson Siklik Dengan Menggunakan Metode Simulasi*. Program Sarjana Institut Teknologi Surabaya, Surabaya. 2004

[9] Wahyujati, Ajie. *Riset Operasional 2-Model Antrian*. 2006