SIFAT-SIFAT RUANG HASIL KALI DALAM-n KOMPLEKS

Sri Maryani
Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknik
Universitas Jenderal Soedirman, Purwokerto
Email : sri.maryani@unsoed.ac.id

Abstract

Inner product is an important concept to learn the properties of geometry in the plane or space. Its can be generalized to n-inner product spaces. This paper will reprove the properties of n-inner product spaces.

Keywords. Gram matrix, n-inner product space.

A. **Pendahuluan**

Hasil kali dalam (*inner product*) merupakan salah satu konsep yang penting untuk mempelajari sifat geometri pada suatu bidang atau ruang. Panjang suatu garis dan sudut yang dibentuk oleh dua buah garis merupakan salah satu dari sifat geometri. Sifat geometri diatas dikenal juga sebagai sifat metrik. Sifat metriks tersebut dapat diekspresikan sebagai hasil kali dalam pada lapangan kompleks $\boldsymbol{C^n}$. Pendefinisian hasil kali dalam merupakan generalisasi dari hasil kali titik (*dot product*).

Hasil kali dalam (*inner product*) dari dua buah vektor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ di $\boldsymbol{C^n}$ secara umum didefinisikan sebagai berikut :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

dengan $\overline{y_i}$ adalah *konjugate* (sekawan) dari y_i. Hasil kali dalam tersebut dapat kita perluas menjadi hasil kali dalam-*n* ≥ 2 . Untuk $= 2$, kita sebut sebagai hasil kali dalam-*2* yang merupakan fungsi bernilai kompleks. Selanjutnya akan diuraikan secara khusus proses pembuktian sifat-sifat dari ruang hasil kali dalam-*n*.

B. **Hasil Dan Pembahasan**

Ruang Hasil Kali Dalam Kompleks

Sebelum dibahas mengenai hasil kali dalam-*n*, terlebih dahulu akan diperkenalkan ruang hasil kali dalam kompleks.

Definisi :

Misalkan $\mathbf{X}$ adalah ruang vektor atas lapangan kompleks C. Suatu hasil kali dalam pada X dapat didefinisikan sebagai pemetaan $\langle .,. \rangle : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \longmapsto \mathbf{C}$, sehingga untuk setiap $x, y, z \in \mathbf{X}$ dan untuk setiap $\alpha \in \mathbf{C}$ memenuhi sifat-sifat di bawah ini :

1. Aditif
   $\langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$
2. Homogen
   $\langle \boldsymbol{\alpha x}, \boldsymbol{y} \rangle = \boldsymbol{\alpha} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$
3. Simetri
   $\overline{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle} = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$
4. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geq \mathbf{0}$; $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \mathbf{0}$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

Berdasarkan sifat hasil kali dalam di atas dan hasil kali dalam-*2* [6](Gunawan,2000:49), konsep hasil kali dalam dapat kita perumum menjadi hasil kali dalam-*n*, untuk setiap $n \in$ N. Misalkan $(\mathbf{X}, \langle . , . \rangle)$ adalah ruang hasil kali dalam maka fungsi

$$\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle \coloneqq \begin{vmatrix} \langle x, y \rangle & \langle x, x_2 \rangle & \dots & \langle x, x_n \rangle \\ \langle x_2, y \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \dots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, y \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \dots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix} \qquad (2.1)$$

disebut sebagai hasil kali dalam-*n* baku pada **X**. Gunawan mendefinisikan hasil kali dalam-*n* lebih sederhana [1](Gunawan,2002:55).

Ruang Hasil Kali Dalam-N Kompleks

Definisi:

Misalkan n bilangan bulat positif dan $\mathbf{X}$ adalah ruang vektor kompleks berdimensi $d \geq n$. Suatu fungsi bernilai kompleks $\langle . , . | . , \dots , . \rangle$ pada $\mathbf{X}^{n+1}$ memenuhi lima sifat di bawah ini, yaitu untuk setiap $x, y, z, x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{X}$ dan $\alpha \in \mathbf{C}$, berlaku :

1. $\langle x_1, x_1 | x_2, \dots, x_n \rangle \geq 0$; $\langle x_1, x_1 | x_2, \dots, x_n \rangle = 0$ jika dan hanya jika $x_1, x_2, \dots, x_n$ bergantung linier

2. $\langle x_1, x_1 | x_2, \dots, x_n \rangle = \langle x_{i1}, x_{i1} | x_{i2}, \dots, x_{in} \rangle$, untuk setiap permutasi $(i_1, \dots, i_n)$ dari $(1, \dots, n)$

3. $\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle = \overline{\langle y, x | x_2, \dots, x_n \rangle}$

4. $\langle \alpha x, y | x_2, \dots, x_n \rangle = \alpha \langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle$

5. $\langle x + y, z | x_2, \dots, x_n \rangle = \langle x, z | x_2, \dots, x_n \rangle + \langle y, z | x_2, \dots, x_n \rangle$

Kelima sifat diatas dinamakan suatu hasil kali dalam-n pada X. Pasangan $(\mathbf{X}, \langle . , . | . , \dots , . \rangle)$ disebut ruang hasil kali dalam-n. Untuk $= 1$, penulisan $\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle$ dikenal sebagai $\langle x, y \rangle$ yang merupakan hasil kali dalam pada X. Akan ditunjukkan bahwa definisi hasil kali dalam-n berlaku pada persamaan (2.1) yaitu

$$\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle \coloneqq \begin{vmatrix} \langle x, y \rangle & \langle x, x_2 \rangle & \dots & \langle x, x_n \rangle \\ \langle x_2, y \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \dots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, y \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \dots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix}$$

memenuhi kelima sifat hasil kali dalam-*n* diatas.

Bukti :

1. Ambil $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ sebarang, berdasarkan (2.1) dan sifat semidefinit positif pada matriks Gram dapat dikatakan bahwa

$$\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle \coloneqq \begin{vmatrix} \langle x, y \rangle & \langle x, x_2 \rangle & \dots & \langle x, x_n \rangle \\ \langle x_2, y \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \dots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, y \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \dots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix} \geq 0$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\langle x_1, x_1 | x_2, \dots, x_n \rangle = 0$ jika dan hanya jika $x_1, x_2, \dots, x_n$ bergantung linier.

[⟹] Misalkan $\langle x_1, x_1 | x_2, \dots, x_n \rangle = 0$, akan ditunjukkan bahwa $x_1, x_2, \dots, x_n$ bergantung linier. Dengan menggunakan kontrapositif, andaikan $x_1, x_2, \dots, x_n$ bebas linier, maka

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \qquad (2.2)$$

Hanya terpenuhi oleh $\alpha_i = 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$. Hasil kali dalam $x_1, x_2, \dots, x_n$ dengan persamaan (2.2) diperoleh

$$\begin{aligned} \langle x_1, x_1 \rangle \overline{\alpha_1} + \langle x_1, x_2 \rangle \overline{\alpha_2} + \dots + \langle x_1, x_n \rangle \overline{\alpha_n} &= 0 \\ \langle x_2, x_1 \rangle \overline{\alpha_1} + \langle x_2, x_2 \rangle \overline{\alpha_2} + \dots + \langle x_2, x_n \rangle \overline{\alpha_n} &= 0 \\ &\vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle \overline{\alpha_1} + \langle x_n, x_2 \rangle \overline{\alpha_2} + \dots + \langle x_n, x_n \rangle \overline{\alpha_n} &= 0 \qquad (2.3) \end{aligned}$$

Persamaan (2.3) diatas dapat ditulis sebagai berikut :

$$\langle x_1, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \rangle = 0$$

$$\langle x_2, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \rangle = 0$$

$$\vdots$$

$$\langle x_n, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \rangle = 0$$

Dengan mengalikan setiap baris ke-i pada persamaan diatas dengan $\alpha_i = 0$; $i = 1, 2, \dots, n$ diperoleh

$$\langle \alpha_1 x_1, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \rangle = 0$$
$$\langle \alpha_2 x_2, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \rangle = 0$$
$$\vdots$$
$$\langle \alpha_n x_n, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \rangle = 0$$

Kemudian jumlahkan setiap baris pada persamaan tersebut, sehingga diperoleh

$$\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \rangle = 0$$
$$\|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n\|^2 = 0$$
$$\|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n\| = 0$$

Berdasarkan sifat norm diperoleh

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

Karena $x_1, x_2, \dots, x_n$ bebas linier yang hanya terpenuhi oleh $\alpha_i = 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$ maka persamaan

$$\begin{vmatrix} \langle x, y\rangle & \langle x, x_2\rangle & \dots & \langle x, x_n\rangle \\ \langle x_2, y\rangle & \langle x_2, x_2\rangle & \dots & \langle x_2, x_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, y\rangle & \langle x_n, x_2\rangle & \dots & \langle x_n, x_n\rangle \end{vmatrix} \neq 0$$

Atau

$$\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle \neq 0$$

Jadi terbukti bahwa, jika $x_1, x_2, \dots, x_n$ bebas linier maka

$$\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle \neq 0$$

Atau dengan kata lain, jika $x_1, x_2, \dots, x_n$ bergantung linier maka

$$\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle = 0$$

[$\Longrightarrow$] Misalkan $x_1, x_2, \dots, x_n$ bergantung linier. Akan ditunjukkan (2.3) memiliki solusi trivial, sedemikian sehingga

bahwa $\langle x_1, x_1 | x_2, \dots, x_n \rangle = 0$. Karena $x_1, x_2, \dots, x_n$ bergantung linier, maka

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \qquad (2.4)$$

Tidak semua $\alpha_i = 0, i = 1, \dots, n$. Hasil kali dalam vektor-vektor $x_1, x_2, \dots, x_n$ dengan persamaan (2.4) diperoleh persamaan (2.3) yang merupakan sistem persamaan linier homogen. Karena $\alpha_i = 0, i = 1, \dots, n$ tidak semuanya nol, maka terdapat solusi tak trivial sedemikian sehingga

$$\langle x, y|x_2, \dots, x_n\rangle := \begin{vmatrix} \langle x, y\rangle & \langle x, x_2\rangle & \dots & \langle x, x_n\rangle \\ \langle x_2, y\rangle & \langle x_2, x_2\rangle & \dots & \langle x_2, x_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, y\rangle & \langle x_n, x_2\rangle & \dots & \langle x_n, x_n\rangle \end{vmatrix} = 0$$

2. Akan ditunjukkan sifat permutasi pada ruang hasil kali dalam-*n*. Berdasarkan definisi (2.1) pada hasil kali dalam-*n*, yaitu

$$\langle x, y|x_2, \dots, x_n\rangle := \begin{vmatrix} \langle x, y\rangle & \langle x, x_2\rangle & \dots & \langle x, x_n\rangle \\ \langle x_2, y\rangle & \langle x_2, x_2\rangle & \dots & \langle x_2, x_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, y\rangle & \langle x_n, x_2\rangle & \dots & \langle x_n, x_n\rangle \end{vmatrix}$$

Dengan menukarkan baris ke-*i* dengan baris ke-*i+1* , *i = j.* Kita peroleh determinan Gram

$$\langle x_1, x_1|x_2, \dots, x_n\rangle = -\begin{vmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \langle x_1, x_2\rangle & \dots & \langle x_1, x_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle x_{i+1}, x_1\rangle & \langle x_{i+1}, x_2\rangle & \dots & \langle x_{i+1}, x_n\rangle \\ \langle x_i, x_1\rangle & \langle x_i, x_2\rangle & \dots & \langle x_i, x_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1\rangle & \langle x_n, x_2\rangle & \dots & \langle x_n, x_n\rangle \end{vmatrix}$$

Kemudian dengan menukarkan kolom ke-j dengan kolom ke-*j+1, i = j* , kita peroleh

$$\langle x_1, x_1|x_2, \dots, x_n\rangle = \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \cdots & \langle x_1, x_{j+1}\rangle & \langle x_1, x_j\rangle & \cdots & \langle x_1, x_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_{i+1}, x_1\rangle & \cdots & \langle x_{i+1}, x_{j+1}\rangle & \langle x_{i+1}, x_j\rangle & \cdots & \langle x_{i+1}, x_n\rangle \\ \langle x_i, x_1\rangle & \cdots & \langle x_i, x_{j+1}\rangle & \langle x_i, x_j\rangle & \cdots & \langle x_i, x_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1\rangle & \cdots & \langle x_n, x_{j+1}\rangle & \langle x_n, j\rangle & \cdots & \langle x_n, x_n\rangle \end{vmatrix}$$

3. Ambil $x, y, x_2, \dots, x_n \in X$ sebarang, berdasarkan (2.1) diperoleh

$$\langle x, y|x_2, \dots, x_n\rangle = \begin{vmatrix} \langle x, y\rangle & \langle x, x_2\rangle & \dots & \langle x, x_n\rangle \\ \langle x_2, y\rangle & \langle x_2, x_2\rangle & \dots & \langle x_2, x_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, y\rangle & \langle x_n, x_2\rangle & \dots & \langle x_n, x_n\rangle \end{vmatrix}$$

Dengan mentranspose setiap entri dari determinan matriks Grannya diatas, kemudian ambil sekawannya diperoleh

$$\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle = \begin{vmatrix} \langle x, y \rangle & \langle x_2, y \rangle & \dots & \langle x_n, y \rangle \\ \langle x, x_2 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \dots & \langle x_n, x_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x, x_n \rangle & \langle x_2, x_n \rangle & \dots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix}$$

$$\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle = \begin{vmatrix} \overline{\langle y, x \rangle} & \overline{\langle y, x_2 \rangle} & \dots & \overline{\langle y, x_n \rangle} \\ \overline{\langle x_2, x \rangle} & \overline{\langle x_2, x_2 \rangle} & \dots & \overline{\langle x_2, x_n \rangle} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\langle x_n, x \rangle} & \overline{\langle x_n, x_2 \rangle} & \dots & \overline{\langle x_n, x_n \rangle} \end{vmatrix}$$

$$\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle = \overline{\langle y, x | x_2, \dots, x_n \rangle}$$

4. Ambil $x, y, x_2, \dots, x_n \in X$ sebarang dan $\alpha \in C$ sebarang, berdasarkan (2.1) diperoleh

$$\langle \alpha x, y | x_2, \dots, x_n \rangle = \begin{vmatrix} \langle \alpha x, y \rangle & \langle \alpha x, x_2 \rangle & \dots & \langle \alpha x, x_n \rangle \\ \langle x_2, y \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \dots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, y \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \dots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix}$$

$$\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle = \begin{vmatrix} \alpha\langle x, y \rangle & \alpha\langle x, x_2 \rangle & \dots & \alpha\langle x, x_n \rangle \\ \langle x_2, y \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \dots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, y \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \dots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix}$$

$$\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle = \alpha \begin{vmatrix} \langle x, y \rangle & \langle x, x_2 \rangle & \dots & \langle x, x_n \rangle \\ \langle x_2, y \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \dots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, y \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \dots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix}$$

$$\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle = \alpha \langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle$$

5. Ambil $x, y, z, x_2, \dots, x_n \in X$ sebarang , berdasarkan definisi (2.1) diperoleh

$$\langle x + y, z | x_2, \dots, x_n \rangle = \begin{vmatrix} \langle x + y, z \rangle & \langle x + y, x_2 \rangle & \dots & \langle x + y, x_n \rangle \\ \langle x_2, y \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \dots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, y \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \dots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix}$$

$$\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle = \begin{vmatrix} \langle x, z \rangle & \langle x, x_2 \rangle & \dots & \langle x, x_n \rangle \\ \langle x_2, y \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \dots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, y \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \dots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \langle y, z \rangle & \langle y, x_2 \rangle & \dots & \langle y, x_n \rangle \\ \langle x_2, y \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \dots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, y \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \dots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix}$$

$$\langle x + y, z | x_2, \dots, x_n \rangle = \langle x, z | x_2, \dots, x_n \rangle + \langle y, z | x_2, \dots, x_n \rangle$$

Terbukti bahwa hasil kali dalam-n pada persamaan (2.1) memenuhi sifat hasil kali dalam-n.

C. **Kesimpulan Dan Saran**

- **Kesimpulan**

Artikel ini menghasilkan sifat-sifat hasil kali dalam-n.

- **Saran**

Dari hasil kali dalam-n, dapat kita induksi menjadi Norm-n yang secara geoletri menyatakan volume paralelpipedium yang dibangun oleh $x_1, x_2, \dots, x_n$

D. **Ucapan Terima Kasih**

Pada penulisan makalah ini penulis haturkan terima kasih yang sebesar-besarnya pada Bapak Prof. Dr. Hendra Gunawan yang telah memberikan bimbingan dan ilmunya sehingga penulis bisa menulis artikel ini dengan sebaik-baiknya.

E. **Daftar Pustaka**

H. Gunawan, On n-inner Products, n-Norms and The Cauchy Schwarz Inequality, Sci. Math.Jpn., 55(2002).53-60.

Anton-Rores, Elementary Linear Algebra, John Wiley and Sons, Inc. New York, 1973.

B. Jacob, Linear Algebra, W.H. Freeman and Company, New York, 1990.

N. Young, An Introducton to Hilbert Spaces, Cambridge Univ Press, New York, 1988.

R. Horn and C. Johnson, Matrix Analysis, Cambridge Univ. Press, New York, 1985.

H. Gunawan, On The Triangle Inequality for The Standard n-Norm, prosiding Konperensi Nasional X Matematika ITB.