Pencarian Solusi Persamaan Diferensial Parsial Non Linier menggunakan Metode Transformasi Pertubasi Homotopi dan Metode Dekomposisi Adomian

Feni Siti Fathonah[1, a)] Diny Zulkarnaen[1, b)] dan Esih Sukaesih[1, c)]

[1] *Jurusan Matematika, Universitas Islam Negeri Sunan Gunung Djati*
Jln. A.H. Nasution No.150. Kota Bandung

[a)]*fathonahfeni@gmail.com*
[b)] *dinyzul@gmail.com*
[c)]*esih_s@yahoo.com*

Abstrak

Persamaan diferensial parsial nonlinear adalah salah satu tinjauan dalam bidang ilmu matematika. Biasanya persamaan nonlinier sangat sulit untuk dipecahkan secara efektif baik secara numerik maupun analisis. Beberapa metode telah dikembangkan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial nonlinier, salah satunya adalah Metode Transformasi Pertubasi Homotopi(MTPH) dan Metode Dekomposisi Adomian(MDA). Kedua metode ini memiliki teknik yang sangat kuat dan efisien untuk memecahkan persamaan diferensial parsial nonlinier.

Kata kunci: Persamaan Diferensial Parsial Nonlinier, Transformasi Laplace, Metode Pertubasi Homotopi, He's Polinomial, Adomian Polinomial

Pendahuluan

Banyak permasalahan muncul dalam berbagai bidang ilmiah termasuk biologi matematika, dinamika fluida, Visco- elastisitas fisika dan matematika. Permasalahan dalam berbagai bidang tersebut dapat dimodelkan dengan menggunakan persamaan diferensial parsial nonlinear. Tetapi persamaan nonlinier sangat sulit untuk dipecahkan secara efektif baik secara numerik maupun analisis.

Beberapa metode telah dikembangkan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial non linier. Salah satu metode yang dapat menyelesaikan sebuah persamaan diferensial parsial non linier adalah metode transformasi pertubasi homotopi. Metode transfomasi pertubasi homotopi memberikan solusi dengan konvergensi yang cepat yang dapat menghasilkan solusi dalam bentuk tertutup. Metode transfomasi pertubasi homotopi diterapkan tanpa batasan asumsi dan menghindari kesalahan pembulatan[7].

Metode dekomposisi adomian juga salah satu metode yang dapat menyelesaikan persamaan diferensial parsial non linier. Metode dekomposisi adomian tidak memerlukan liniearisasi dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial nonlinier[1]. Keuntungan utama dari metode dekomposisi adomian adalah metode ini memiliki teknik yang kuat dengan algoritma yang efisien untuk solusi perkiraan analitik dan simulasi numerik. Hal ini memungkinkan kita untuk dapat memecahkan kedua masalah nonlinier yaitu masalah nilai awal dan masalah nilai batas[5]. Selain itu, metode dekomposisi adomian sangat mampu mengurangi pengerjaan komputasi dengan tetap mempertahankan hasil akurasi yang tinggi dari solusi numerik[2].

Teori

Metode Transformasi Pertubasi Homotopi

Untuk menggambarkan ide dasar dari metode ini, pertimbangkan bentuk persamaan diferensial parsial nonlinier sebagai berikut[9]:

$$Du(x,t) + Ru(x,t) + Nu(x,t) = g(x,t) \tag{3.1}$$

dengan kondisi awalnya adalah

$$u(x,0) = k(x) \text{ dan } u_t(x,0) = f(x) \tag{3.2}$$

dimana:

D adalah operator diferensial linier orde kedua yang dinotasikan $D = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$

R adalah operator diferensial linier yang ordenya lebih kecil dari D

N adalah operator diferensial nonlinier

$g(x,t)$ adalah bentuk sumber.

Langkah yang dilakukan dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial nonlinier diatas, yaitu:

a. Aplikasikan transformasi laplace

   Lakukan transformasi laplace pada persamaan (3.1),

   $$s^2 L[u(x,t)] - s[u(x,0)] - \frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = L[g(x,t)] - L[Ru(x,t)] - L[Nu(x,t)]$$

b. Substitusikan kondisi awalnya

   $$L[u(x,t)] = \frac{k(x)}{s} + \frac{f(x)}{s^2} + \frac{1}{s^2}L[g(x,t)] - \frac{1}{s^2}L[Ru(x,t)] - \frac{1}{s^2}L[Nu(x,t)]$$

c. Lakukan invers laplace

   $$u(x,t) = G(x,t) - L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}L[Ru(x,t)] - \frac{1}{s^2}L[Nu(x,t)]\right] \tag{3.3}$$

   Dimana $G(x,t)$ adalah invers laplace dari bentuk sumber dan kondisi awal.

d. Aplikasikan metode pertubasi homotopi

   $$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x,t) \tag{3.4}$$

   dan bentuk nonliniernya bisa didekomposisikan sebagai berikut

   $$Nu(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(u) \tag{3.5}$$

   Substitusikan persamaan (3.4) dan persamaan (3.5) kedalam persamaan (3.3),

   $$\sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x,t) = G(x,t) - L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}L[R\sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x,t) + \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(u)]\right]$$

   dimana $H_n(u)$ adalah He's polinomial.

e. Hitung He's polinomial dengan menggunakan rumus berikut ini

   $$H_n(u_0 + u_1 + u_2 + \cdots) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial p^n}\left[N\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i u_i\right)\right]_{p=0}$$

   dengan $n = 0,1,2,\ldots$

f. Bandingkan koefisien pangkat yang sama dari p pada kedua ruas, sehingga diperoleh sebagai berikut:

   $$p^0 : u_0(x,t) = G(x,t)$$

   $$p^1 : u_1(x,t) = -L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}L[Ru_0(x,t) + H_0(u)]\right]$$

   $$p^2 : u_2(x,t) = -L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}L[Ru_1(x,t) + H_1(u)]\right]$$

   $$\vdots$$

Metode Dekomposisi Adomian

Untuk menggambarkan ide dasar dari metode ini, pertimbangkan bentuk persamaan diferensial parsial nonlinier sebagai berikut[6]:

$$Du(x,t) + Ru(x,t) + Nu(x,t) = g(x,t) \tag{3.6}$$

dengan kondisi awalnya adalah

$$u(x,0) = k(x) \text{ dan } u_t(x,0) = f(x)$$

dimana:

D adalah operator diferensial linier yang ordenya lebih besar dari R yang dinotasikan $D = \frac{\partial}{\partial t}$

R adalah operator diferensial linier yang ordenya lebih kecil dari D

N adalah operator diferensial nonlinier

$g(x,t)$ adalah bentuk sumber.

Langkah yang dilakukan dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial nonlinier diatas, yaitu:

a. Aplikasikan operator invers D^{-1}

   Aplikasikan operator invers D^{-1} pada kedua ruas persamaan (3.6), dimana D^{-1} adalah integral tertentu dalam bentuk $D^{-1}u(x,t) = \int_0^t u(x,s)\, ds$.

   $u(x,t) = f - D^{-1}[Ru(x,t) + Nu(x,t)]$

   Dimana f adalah hasil yang timbul dari hasil integral bentuk sumber $g(x,t)$.

b. Aplikasikan Metode Dekomposisi Adomian

   $$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,t) \tag{3.7}$$

   dan bentuk nonliniernya bisa didekomposisikan sebagai berikut

   $$Nu(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \tag{3.8}$$

   Dimana A_k adalah Adomian polinomial.

c. Hitung Adomian Polinomial dengan menggunakan rumus berikut:

   $$A_k = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{d\lambda^k}\left[N\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i U_i\right)\right]_{\lambda=0} \tag{3.9}$$

   dengan $k = 0, 1, 2, \ldots$

d. Hitung $u(x,y,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,y,t)$ agar didapatkan solusi.

   $u_0(x,t) = f$

   $u_k(x,t) = -D^{-1}Ru_{k-1} - D^{-1}A_{k-1}$

   dimana Ru_{k-1} adalah untuk bentuk linier dan A_{k-1} untuk bentuk nonlinier.

Hasil dan Diskusi

Pada bagian ini akan dibahas penerapan metode transformasi pertubasi homotopi dan metode dekomposisi adomian. Kesederhanaan dan akurasi dari algoritma-algoritma dari kedua metode digambarkan melalui contoh-contoh numerik berikut.

Contoh 1. Misalkan diketahui persamaan diferensial parsial nonlinier sebagai berikut:

$$u_t(x,y,t) = \frac{\partial^2 u^2(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^2(x,y,t)}{\partial y^2} + u(x,y,t) \tag{4.1}$$

Dengan kondisi awal,

$$u(x,y,0) = \sqrt{(\sin x \sinh y)} \tag{4.2}$$

A. Penyelesaian dengan Metode Transformasi Pertubasi Homotopi

a. Aplikasikan transformasi laplace

   Lakukan transformasi laplace pada kedua ruas persamaan (4.1), Sehingga akan didapatkan,

   $$L[u(x,y,t)] = \frac{1}{s}u(x,y,0) + \frac{1}{s}\, L\left[\frac{\partial^2 u^2(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^2(x,y,t)}{\partial y^2} + u(x,y,t)\right]$$

b. Substitusikan kondisi awalnya

$$L[u(x,y,t)] = \frac{1}{s}\sqrt{(\sin x \sinh y)} + \frac{1}{s}\, L\left[\frac{\partial^2 u^2(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^2(x,y,t)}{\partial y^2} + hu(x,y,t)\right]$$

c. Lakukan invers laplace

$$u(x,y,t) = \sqrt{(\sin x \sinh y)} + L^{-1}\left(\frac{1}{s}\, L\left[\frac{\partial^2 u^2(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^2(x,y,t)}{\partial y^2} + u(x,y,t)\right]\right)$$

d. Aplikasikan metode pertubasi homotopi

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n\, u_n(x,y,t) = \sqrt{(\sin x \sinh y)} + p\left(L^{-1}\left[\frac{1}{s} L\left[\sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(u) + \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n'(u) + \sum_{n=0}^{\infty} p^n\, u_n(x,y,t)\right]\right]\right)$$

Dimana $H_n(u)$ dan $H_n'(u)$ adalah He's polynomial yang menggambarkan bentuk non linier.

e. Hitung nilai $H_n(u)\ dan\ H_n'(u)$ atau yang sering disebut he's polynomial

Untuk $H_n(u)$ didapatkan

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(u) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x,y,t)\right)^2$$

$$H_0(u) = \frac{\partial^2 {u_0}^2(x,y,t)}{\partial x^2}$$

$$H_1(u) = 2\frac{\partial^2 u_0(x,y,t)u_1(x,y,t)}{\partial x^2}$$

$$H_2(u) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(2u_0(x,y,t)u_2(x,y,t) + {u_1}^2(x,y,t)\right)$$

$$H_3(u) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(2u_1(x,y,t)u_2(x,y,t) + 2u_0(x,y,t)u_3(x,y,t)\right)$$

$$\vdots$$

Untuk $H_n'(u)$ didapatkan

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n'(u) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x,y,t)\right)^2$$

$$H_0'(u)\frac{\partial^2 {u_0}^2(x,y,t)}{\partial y^2}$$

$$H_1'(u) = 2\frac{\partial^2 u_0(x,y,t)u_1(x,y,t)}{\partial y^2}$$

$$H_2'(u) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(2u_0(x,y,t)u_2(x,y,t) + {u_1}^2(x,y,t)\right)$$

$$H_3'(u) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(2u_1(x,y,t)u_2(x,y,t) + 2u_0(x,y,t)u_3(x,y,t)\right)$$

$$\vdots$$

f. Bandingkan koefisien pangkat yang sama dari p agar didapatkan solusi

$$p^0: u_0(x,y,t) = \sqrt{(\sin x \sinh y)}$$

$$p^1: p^1 u_1(x,y,t) = p^1 L^{-1}\left[\frac{1}{s} L(H_0(u) + H_0'(u) + u_0)\right] = t\sqrt{(\sin x \sinh y)}$$

$$p^2: p^2 u_2(x,y,t) = p^2 L^{-1}\left[\frac{1}{s} L(H_1(u) + H_1'(u) + u_1)\right] = \frac{t^2}{2}\sqrt{(\sin x \sinh y)}$$

$$p^3: p^3 u_3(x,y,t) = p^3 L^{-1}\left[\frac{1}{s} L(H_2(u) + H_2'(u) + u_2)\right] = \frac{t^3}{6}\sqrt{(\sin x \sinh y)}$$

$$p^4: p^4 u_4(x,y,t) = p^4 L^{-1}\left[\frac{1}{s} L(H_3(u) + H_3'(u) + u_3)\right] = \frac{t^4}{24}\sqrt{(\sin x \sinh y)}$$

$$\vdots$$

Maka solusi deret dari persamaan (4.1) adalah sebagai berikut:

$$u(x,y,t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i = \sqrt{(\sin x \sinh y)}\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots\right)$$

Maka solusi dengan bentuk tertutup dari persamaan (4.1) adalah

$$u(x,y,t) = \sqrt{(\sin x \sinh y)}\exp(t).$$

B. Penyelesaian dengan Metode Dekomposisi Adomian

a. Aplikasikan operator invers D^{-1} pada persamaan (4.1),

$u(x,y,t) = D^{-1}\left[u_{xx}^2(x,y,t) + u_{yy}^2(x,y,t) + u(x,y,t)\right]$

b. Aplikasikan Metode Dekomposisi Adomian

$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,y,t) = D^{-1}[\sum_{k=0}^{\infty} A_k + \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,y,t)]$

Dan didapat,

$u_0(x,y,t) = u(x,y,0) = \sqrt{(\sin x \sinh y)}$

$u_k(x,y,t) = \int_0^t u_{k-1}(x,y,s)\, ds + \int_0^t A_{k-1}\, ds$

c. Hitung Adomian Polinomial atau A_k

$A_k = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{d\lambda^k}\left[\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k\right)_{xx}^2 + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k\right)_{yy}^2\right]_{\lambda=0}$

$A_0 = \left[(u_0)_{xx}^2 + (u_0)_{yy}^2\right]$

$A_1 = \frac{d}{d\lambda}\left[(u_0^2 + 2\lambda u_0 u_1)_{xx} + (u_0^2 + 2\lambda u_0 u_1)_{yy}\right]$

$A_2 = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}\Big[\left(u_0^2 + 2\lambda u_0 u_1 + (2\lambda^2 u_0 u_2 + (\lambda u_1)^2)\right)_{xx} + \Big(u_0^2 + 2\lambda u_0 u_1 + (2\lambda^2 u_0 u_2 +$
$(\lambda u_1)^2)\Big)_{yy}\Big]$

$A_3 = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3}\Big[\left(u_0^2 + 2\lambda u_0 u_1 + (2\lambda^2 u_0 u_2 + (\lambda u_1)^2) + (2\lambda^3 u_0 u_3 + 2\lambda^3 u_1 u_2)\right)_{xx} +$
$\left(u_0^2 + 2\lambda u_0 u_1 + (2\lambda^2 u_0 u_2 + (\lambda u_1)^2) + (2\lambda^3 u_0 u_3 + 2\lambda^3 u_1 u_2)\right)_{yy}\Big]$

$\vdots$

d. Hitung u_n agar didapatkan solusi

$u_0(x,y,t) = \sqrt{\sin x \sinh y}$

$u_1(x,y,t) = \int_0^t u_0(x,y,s)\, ds + \int_0^t A_0\, ds = t\sqrt{\sin x \sinh y}$

$u_2(x,y,t) = \int_0^t u_1(x,y,s)\, ds + \int_0^t A_1\, ds = \frac{t^2}{2}\sqrt{\sin x \sinh y}$

$u_3(x,y,t) = \int_0^t u_2(x,y,s)\, ds + \int_0^t A_2\, ds = \frac{t^3}{6}\sqrt{\sin x \sinh y}$

$u_4(x,y,t) = \int_0^t u_3(x,y,s)\, ds + \int_0^t A_3\, ds = \frac{t^4}{24}\sqrt{\sin x \sinh y}$

$\vdots$

Maka solusi deret dari persamaan (4.1) adalah sebagai berikut:

$u(x,y,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sqrt{(\sin x \sinh y)}\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \cdots\right)$

Maka solusi dengan bentuk tertutup dari persamaan (4.1) adalah

$u(x,y,t) = \exp(t)\sqrt{(\sin x \sinh y)}.$

Contoh 2. Misalkan diketahui persamaan diferensial parsial nonlinier sebagai berikut:

$$u_t(x,y,t) = \frac{\partial^2 u^2(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^2(x,y,t)}{\partial y^2} - u(x,y,t)(1 + ru(x,y,t)) \qquad (4.3)$$

dengan kondisi awal

$$u(x,y,0) = \exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2}}(x+y)\right) \qquad (4.4)$$

A. Penyelesaian dengan Metode Transformasi Pertubasi Homotopi

a. Aplikasikan transformasi laplace

Lakukan transformasi laplace pada kedua ruas persamaan (4.3), sehingga didapatkan

$L[u(x,y,t)] = \frac{1}{s}u(x,y,0) + \frac{1}{s}\, L\left[\frac{\partial^2 u^2(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^2(x,y,t)}{\partial y^2} - u(x,y,t)\big(1 + ru(x,y,t)\big)\right]$

b. Substitusikan kondisi awalnya

$$L[u(x,y,t)] = \frac{1}{s}\exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2}}(x+y)\right) + \frac{1}{s}\,L\left[\frac{\partial^2 u^2(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^2(x,y,t)}{\partial y^2} - u(x,y,t)\big(1 + ru(x,y,t)\big)\right]$$

c. Lakukan invers laplace

$$u(x,y,t) \;= \exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2}}(x+y)\right) + L^{-1}\left(\frac{1}{s}\,L\left[\frac{\partial^2 u^2(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^2(x,y,t)}{\partial y^2} - u(x,y,t) - ru^2(x,y,t)\right]\right)$$

d. Aplikasikan metode pertubasi homotopi

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n\, u_n(x,y,t) = \exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2}}(x+y)\right) + p\left(L^{-1}\left[\frac{1}{s}L\left[\sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(u) + \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n'(u) - \sum_{n=0}^{\infty} p^n\, u_n(x,y,t) - \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n''(u)\right]\right]\right)$$

Dimana $H_n(u)$, $H_n'(u)$ dan $H_n''(u)$ adalah He's polynomial yang menggambarkan bentuk non linier.

e. Hitung nilai $H_n(u)$, $H_n'(u)$ dan $H_n''(u)$ atau yang sering disebut he's polynomial

Untuk $H_n(u)$ didapatkan

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(u) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x,y,t)\right)^2$$

$$H_0(u) = \frac{\partial^2 {u_0}^2(x,y,t)}{\partial x^2}$$

$$H_1(u) = 2\,\frac{\partial^2 u_0(x,y,t)u_1(x,y,t)}{\partial x^2}$$

$$H_2(u) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(2u_0(x,y,t)u_2(x,y,t) + {u_1}^2(x,y,t)\big)$$

$$H_3(u) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(2u_1(x,y,t)u_2(x,y,t) + 2u_0(x,y,t)u_3(x,y,t)\big)$$

$$\vdots$$

Untuk pencarian $H_n'(u)$ didapatkan,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n'(u) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x,y,t)\right)^2$$

$$H_0'(u) = \frac{\partial^2 {u_0}^2(x,y,t)}{\partial y^2}$$

$$H_1'(u) = 2\,\frac{\partial^2 u_0(x,y,t)u_1(x,y,t)}{\partial y^2}$$

$$H_2'(u) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\big(2u_0(x,y,t)u_2(x,y,t) + {u_1}^2(x,y,t)\big)$$

$$H_3'(u) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\big(2u_1(x,y,t)u_2(x,y,t) + 2u_0(x,y,t)u_3(x,y,t)\big) \quad (4.99)$$

$$\vdots$$

Untuk pencarian $H_n''(u)$ didapatkan,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n''(u) = r\left(\sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x,y,t)\right)^2$$

$$H_0''(u) = r{u_0}^2(x,y,t)$$

$$H_1''(u) = 2\,ru_0(x,y,t)u_1(x,y,t)$$

$$H_2''(u) = r\big(2u_0(x,y,t)u_2(x,y,t) + {u_1}^2(x,y,t)\big)$$

$$H_3''(u) = r\big(2u_1(x,y,t)u_2(x,y,t) + 2u_0(x,y,t)u_3(x,y,t)\big)$$

$$\vdots$$

f. Bandingkan koefisien pangkat yang sama dari p agar didapatkan solusi

$$p^0\!: u_0(x,y,t) = \exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2}}(x+y)\right)$$

$$p^1\!: p^1u_1(x,y,t) = p^1L^{-1}\left[\frac{1}{s}L\big(H_0(u) + H_0'(u) - u_0 - H_0''(u)\big)\right] = -t\exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2}}(x+y)\right)$$

$$p^2\!: p^2u_2(x,y,t) = p^2L^{-1}\left[\frac{1}{s}L\big(H_1(u) + H_1'(u) - u_1 - H_1''(u)\big)\right] = \frac{t^2}{2}\exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2}}(x+y)\right)$$

$$p^3: p^3u_3(x,y,t) = p^3L^{-1}\left[\frac{1}{s}L\big(H_2(u) + H_2'(u) - u_2 - H''_2(u)\big)\right] = -\frac{t^3}{6}\exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2}}(x+y)\right)$$

$$p^4: p^4u_4(x,y,t) = p^4L^{-1}\left[\frac{1}{s}L\big(H_3(u) + H_3'(u) - u_3 - H''_3(u)\big)\right] = \frac{t^4}{24}\exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2}}(x+y)\right)$$

$\vdots$

Maka solusi deret dari persamaan (4.3) adalah sebagai berikut:

$$u(x,y,t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i = \exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2}}(x+y)\right)\left(1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots\right)$$

maka solusi bentuk tertutupnya adalah

$$u(x,y,t) = \exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2}}(x+y) - t\right)$$

B. Penyelesaian dengan Metode Dekomposisi Adomian

a. Aplikasikan operator invers D^{-1}

$$u(x,y,t) = D^{-1}\left[u_{xx}^2(x,y,t) + u_{yy}^2(x,y,t) - u(x,y,t) - ru^2(x,y,t)\right]$$

b. Aplikasikan Metode Dekomposisi Adomian

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,y,t) = D^{-1}\left[u_{xx}^2(x,y,t) + u_{yy}^2(x,y,t) - \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,y,t) - ru^2(x,y,t)\right]$$

dan didapat,

$$u(x,y,0) = u_0(x,y,t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2}}(x+y)$$

$$u_k(x,y,t) = -\int_0^t u_{k-1}(x,y,s)\,ds + \int_0^t A_{k-1}\,ds$$

c. Hitung Adomian Polinomial atau A_k

$$A_k = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{d\lambda^k}\left[\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k u_k\right)_{xx}^2 + \left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k u_k\right)_{yy}^2 - r\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k u_k\right)^2\right]_{\lambda=0}$$

$$A_0 = \left[(u_0)_{xx}^2 + (u_0)_{yy}^2 - r(u_0)^2\right]$$

$$A_1 = \frac{d}{d\lambda}\left[(u_0^2 + 2\lambda u_0u_1)_{xx} + (u_0^2 + 2\lambda u_0u_1)_{yy} - r(U_0^2 + 2\lambda u_0u_1)\right]$$

$$A_2 = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}\left[\left(u_0^2 + 2\lambda u_0u_1 + (2\lambda^2u_0u_2 + (\lambda u_1)^2)\right)_{xx} + \left(u_0^2 + 2\lambda u_0u_1 + (2\lambda^2u_0u_2 + (\lambda u_1)^2)\right)_{yy} - r\left(u_0^2 + 2\lambda u_0u_1 + (2\lambda^2u_0u_2 + (\lambda u_1)^2)\right)\right]$$

$$A_3 = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3}\left[\left(u_0^2 + 2\lambda u_0u_1 + (2\lambda^2u_0u_2 + (\lambda u_1)^2) + (2\lambda^3u_0u_3 + 2\lambda^3u_1u_2)\right)_{xx} + \left(u_0^2 + 2\lambda u_0u_1 + (2\lambda^2u_0u_2 + (\lambda u_1)^2) + (2\lambda^3u_0u_3 + 2\lambda^3u_1u_2)\right)_{yy} - r\left(u_0^2 + 2\lambda u_0u_1 + (2\lambda^2u_0u_2 + (\lambda u_1)^2) + (2\lambda^3u_0u_3 + 2\lambda^3u_1u_2)\right)\right]$$

$\vdots$

d. Hitung u_n agar didapatkan solusi

$$u_0(x,y,t) = \exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2}}(x+y)\right)$$

$$u_1(x,y,t) = -\int_0^t u_0(x,y,s)\,ds + \int_0^t A_0\,ds = -t\exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2}}(x+y)\right)$$

$$u_2(x,y,t) = -\int_0^t u_1(x,y,s)\,ds + \int_0^t A_1\,ds = \frac{t^2}{2}\exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2}}(x+y)\right)$$

$$u_3(x,y,t) = -\int_0^t u_2(x,y,s)\,ds + \int_0^t A_2\,ds = -\frac{t^3}{6}\exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2}}(x+y)\right)$$

$$u_4(x,t) = -\int_0^t u_3(x,y,s)\,ds + \int_0^t A_3\,ds = \frac{t^4}{24}\exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2}}(x+y)\right)$$

⋮

Maka solusi deret dari persamaan (4.3) adalah sebagai berikut:

$$u(x,y,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k=\exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2}}(x+y)\right)\left(1-t+\frac{t^2}{2!}-\frac{t^3}{6}+\frac{t^4}{24}-\cdots\right)$$

Maka solusi dengan bentuk tertutup

$$u(x,y,t)=\exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2}}(x+y)-t\right)$$

Kesimpulan

Dengan melihat proses penyelesaian di atas, dapat disimpulkan bahwa metode transformasi pertubasi homotopi dan metode dekomposisi adomian berhasil diterapkan dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial nonlinier dan memiliki hasil solusi yang sama. Namun, metode dekomposisi adomian lebih sederhana dan efisien dibandingkan dengan metode transformasi pertubasi homotopi.

Referensi

[1] Adomian George. 1988. “A review of the decomposition method in applied mathematics”. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 501-544.

[2] Ali, A.H and Al-Saif, A.S.J. 2008. “Adomian decomposition method for solving some models of nonlinier partial differential equations”. *Basrah Journal of Science*. 26(1) 1-11.

[3] Boyce, William E. dan Richard C.DilPrima, Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, John Wiley & Sons, Inc. , New York, 2011.

[4] Debnath, Lokenath dan Dambaru Bhatta, Integral Transforms and Their Applications Second Edition, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2007.

[5] Duan, J.S. (et.al.). 2012. “A review of the adomian decomposition method and its applications to fractional differential equations”. *Commun. Frac. Calc.* 3 (2) 73–99.

[6] Gepreel, K.A. 2012. “Adomian decomposition method to find the approximate solutions for the fractional PDEs”. *Wseas Transactions on Mathematics*. 7(11).

[7] Gupta, V.G. (et.al.). 2013. “Homotopy perturbation transform method for solving nonlinear wave-like equations of variable coefficients”. *Journal of Information and Computing Science*. 8(3) 163-172.

[8] Kreyszig, Erwin, Advance Engineering Mathematics, John Wiley & Sons, Inc. , New York, 2006.

[9] Kumar Devendra. (et.al.). 2013. “A Reliable Treatment of Biological Population Model by Using Laplace Transform”. *International Journal of Modern Mathematical Sciences*. 7(2) 132-142.

[10] Misra, O.P. dan J.L Lavoine, Transform Analysis of Generalized Functions, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1986.

[11] Noor, Muhammad Aslam (et.al). 2008. “Homotopy Perturbation Method for Solving Partial Differential Equations”. *Z. Naturforsch*. 64a 157 – 170.

[12] Purcell, E.J. and D. Varberg, Kalkulus, Jilid 1 Edisi Kesembilan, Erlangga, Jakarta, 2008.

[13] Purcell, E.J. and D. Varberg, Kalkulus, Jilid 2 Edisi Kedelapan, Erlangga, Jakarta, 2003.

[14] Sakheri Fatemeh. (et.al.). 2007. “Numerical solution of biological population model using He’s variational iteration method”. *An International Journal Computers and Mathematics with Applications*. 1197-1209.

[15] Singh Jagdev. (et.al.). 2012. “Application of Homotopy Perturbation Transform Method for Solving Linear and Nonlinear Klein-Gordon Equations”. *Journal of Information and Computing Science*. 7(2) 131-139.

[16] Yahya, Yusuf (et.al.), Matematika Dasar Perguruan Tinggi, Ghalia Indonesia, Bogor, 2010.