Jurnal Kubik, Volume 2 No. 1 (2017) **ISSN : 2338-0896**

Representasi Deret ke dalam Bentuk Integral Lipat Dua

Siti Julaeha[1, a)] dan Arini Soesatyo Putri [2, b)]

[1]*Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN SGD Bandung*
[2]*Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN SGD Bandung*

[a)]*email: Siti.Julaeha83@uinsgd.ac.id*
[b)] *email: Oryza.shina@gmail.com*

Abstrak

Representasi suatu deret ke dalam bentuk lain merupakan salah satu kajian yang terdapat di dalam ilmu matematika. Salah satu representasi yang paling umum digunakan adalah representasi deret ke dalam bentuk integral, yang memungkinkan deret tersebut (khususnya deret tak terhingga) dapat ditentukan nilai atau jumlahnya. Banyak cara untuk merepresentasikan deret ke dalam bentuk integral, diantaranya dengan memanfaatkan ekspansi deret Maclaurin, fungsi khusus integral (fungsi gamma dan beta), serta teorema-teorema yang telah ada sebelumnya. Anthony Sofo [9] dalam kajiannya telah menemukan bentuk deret $S(a,b,j,k,m,t)$, yang kemudian akan dikaji bagaimana bentuk integral lipat dua dari deret tersebut di dalam paper ini beserta analisis kekonvergenannya.

Kata kunci*: Deret Maclaurin*, *Integral Lipat Dua, Integral Euler*, *Identitas Kombinatorial.*

Pendahuluan

Masalah utama dalam kajian deret terutama deret tak hingga adalah untuk mencari status konvergensi dan menentukan nilai atau jumlah dari deret tersebut yang tidak dapat dikalkulasikan dengan cara biasa. Hal inilah yang menjadi landasan dilakukannya representasi suatu deret. Salah satu representasi yang digunakan ialah representasi deret ke dalam bentuk integral. Masalah ini sudah dikaji dengan baik dalam kajian matematika diskrit dan kalkulus. Di dalam paper ini, kita akan mengkaji bentuk integral dari deret

$$S(a,b,j,k,m,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \binom{n+m-1}{n}}{(an+j+1)^{k+1}\binom{an+j}{bn}}$$

Dan status konvergensinya. Kita menganalisis beberapa hasil yang telah dipublikasikan oleh Anthony Sofo [9] dan penulis lainnya.

Teori

Definisi 1.1. [1] Fungsi Gamma dikenal juga sebagai integral Euler kedua, didefinisikan oleh integral tak wajar

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx.$$

Integral tersebut konvergen secara mutlak untuk $x \geq 1$. Atau dapat juga didefinisikan sebagai fungsi faktorial $\Gamma(p) = (p-1)!$.

Definisi 1.2. [1] Fungsi Beta dikenal sebagai integral Euler pertama, didefinisikan sebagai

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \text{ untuk } p > 0 \text{ dan } q > 0.$$

Hubungan fungsi gamma dan fungsi beta didefinisikan oleh

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Definisi 1.3. [3] Deret Maclaurin merupakan deret Taylor dari suatu fungsi di tiitk 0 yang didefinisikan dengan

$$f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

Definisi 1.4. [6] Deret Hipergeometri didefinisikan oleh deret pangkat

$$F_q^p(a_1, a_2, \ldots, a_p;\ b_1, b_2, \ldots, b_q; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n(a_2)_n \ldots (a_p)_n t^n}{(b_1)_n(b_2)_n \ldots (b_q)_n n!}$$

Dimana $(a)_n = a(a+1)(a+2)(a+3)\ldots(a+n-1)$ merupakan simbol *Pochhammer.*

Hasil dan Diskusi

Lemma berikut ini merupakan representasi integral dari $\frac{1}{(k+a)^j}$, yang mana bentuk identitas tersebut akan membantu kita untuk menemukan representasi integral dari suatu deret tertentu.

Lemma 1.5. [9[Misalkan $k + a \geq 0$, $k, a \in R$ dan $j \geq 0$, maka

$$\frac{1}{(k+a)^j} = \begin{cases} \frac{1}{(j-1)!}\int_0^{\infty} y^{j-1}e^{-y(k+a)}dy, & \text{untuk } j \geq 1 \\ 1 & \text{, untuk } j = 0 \end{cases}$$

Bukti. Untuk $j \geq 1$, dengan menggunakan integral parsial kita peroleh

$$\frac{1}{(j-1)!}\int_0^{\infty} y^{j-1}e^{-y(k+a)}dy = \frac{1}{(j-1)!}\left[\int_0^{\infty} \frac{j-1}{k+a} e^{-y(k+a)}y^{j-2}dy\right]$$
$$= \frac{(j-1)(j-2)(j-3)\ldots(2)(1)}{(j-1)!(k+a)^{j-1}}\left[\int_0^{\infty} e^{-y(k+a)}dy\right] = \frac{1}{(k+a)^j}.$$

Untuk $j = 0$, maka didapat

$$\frac{1}{(k+a)^0} = 1. \blacksquare$$

Teorema selanjutnya akan membahas mengenai representasi deret $S(a,j,k,m,t)$, yang mana deret tersebut menjadi landasan untuk merepresentasikan deret $S(a,b,j,k,m,t)$ yang telah didefinisikan sebelumnya.

Teorema 1.6. [9] Misalkan *a* merupakan bilangan bulat positif sebarang, $|t| \leq 1$, $j \geq 0$, $k \geq 0$, dan $m \geq 1$, maka

$$S(a,j,k,m,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n\binom{n+m-1}{n}}{(an+j+1)^{k+1}\binom{an+j}{j}}$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{(k-1)!}\int_0^{\infty}\int_0^1 \frac{(1-x)^j y^{k-1}e^{-y(j+1)}}{(1-tx^a e^{-ay})^m}dxdy, & \text{untuk } k \geq 1 \\ \int_0^1 \frac{(1-x)^j}{(1-tx^a)^m}dx & \text{, untuk } k = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Bukti. Untuk $k \geq 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \binom{n+m-1}{n}}{(an+j+1)^{k+1} \binom{an+j}{j}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \binom{n+m-1}{n} j!(an)!}{(an+j+1)^k (an+j+1)!}.$$

Berdasarkan definisi fungsi gamma dan beta, selanjutnya kita peroleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \binom{n+m-1}{n} \Gamma(j+1)\Gamma(an+1)}{(an+j+1)^k \Gamma(an+j+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \binom{n+m-1}{n}}{(an+j+1)^k} B(an+1, j+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \binom{n+m-1}{n}}{(an+j+1)^k} \int_0^1 x^{an} (1-x)^j dx$$

$$= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} t^n \binom{n+m+1}{n} \int_0^{\infty} y^{k-1} e^{-y(an+j+1)} dy \int_0^1 x^{an} (1-x)^j dx$$

Dengan menggunakan Lemma 1.5 dan asumsi dapat mengubah urutan penjumlahan dengan integral, maka

$$\frac{1}{(k-1)!} \int_0^{\infty} \int_0^1 (1-x)^j\, y^{k-1} e^{-y(j+1)} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m+1}{n} (te^{-ya} x^a)^n\right] dx \qquad (2)$$

Selanjutnya perhatikan bentuk deret $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{n} (te^{-ya} x^a)^n$, dengan menggunakan fungsi pembangkit deret tersebut memiliki bentuk tertutup $(1 - te^{-ya} x^a)^{-m}$. Dari persamaan (2) dapat dituliskan menjadi

$$\frac{1}{(k-1)!} \int_0^{\infty} \int_0^1 (1-x)^j\, y^{k-1} e^{-y(j+1)} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m+1}{n} (te^{-ya} x^a)^n\right] dx$$

$$= \frac{1}{(k-1)!} \int_0^{\infty} \int_0^1 \frac{(1-x)^j y^{k-1} e^{-y(j+1)}}{(1-te^{-ya} x^a)^m} dx dy. \qquad (3)$$

Untuk $k = 0$,

$$S(a, j, 0, m, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \binom{n+m-1}{n}}{(an+j+1) \binom{an+j}{j}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \binom{n+m-1}{n} \Gamma(j+1)\Gamma(an+1)}{\Gamma(an+j+2)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \binom{n+m-1}{n} \int_0^1 x^{an} (1-x)^j dx = \int_0^1 (1-x)^j \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{n}$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-x)^j}{(1-tx^a)^m} dx.$$

Selanjutnya akan ditentukan interval dimana deret $S(a, j, k, m, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \binom{n+m-1}{n}}{(an+j+1)^{k+1} \binom{an+j}{j}}$ konvergen menuju suatu nilai. Perhatikan bahwa $\frac{t^n \binom{n+m-1}{n}}{(an+j+1)^{k+1} \binom{an+j}{j}} \leq \frac{t^n \binom{n+m-1}{n}}{(an+1) \binom{an}{0}} = \frac{t^n \binom{n+m-1}{n}}{(an+1)}$. Dengan menggunakan uji rasio mutlak kita peroleh

$$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{t^{n+1} \binom{n+m}{n+1}}{(an+a+1)} \frac{(an+1)}{t^n \binom{n+m-1}{n}}\right| = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{t(an+1)(n+m)}{(an+a+1)(n+1)}\right| = |t| < 1.$$

Sehingga deret $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \binom{n+m-1}{n}}{(an+1)}$ akan konvergen untuk $|t| < 1$, mengakibatkan $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \binom{n+m-1}{n}}{(an+j+1)^{k+1} \binom{an+j}{j}}$ juga akan konvergen untuk $|t| < 1$.

Dengan terbuktinya Teorema 1.6, sehingga melahirkan akibat sebagai berikut

Akibat 1.7. [9] Misalkan kondisi pada Teorema 1.6 terpenuhi, maka

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n\binom{n+m-1}{n}}{(an+j+1)^{k+1}\binom{an+j}{j}} = \frac{amt}{k!}\int_0^{\infty}\int_0^1 \frac{(1-x)^j x^{a-1} y^k e^{-y(a+j+1)}}{(1-tx^a e^{-ay})^{m+1}}\,dxdy, \text{ for } k \geq 0 \quad (4)$$

Bukti. Berdasarkan Teorema 1.6

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n\binom{n+m-1}{n}}{(an+j+1)^{k+1}\binom{an+j}{j}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n\binom{n+m-1}{n} j!(an)!}{(an+j+1)^{k+1}(an+j)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n\binom{n+m-1}{n}\Gamma(j+1)an\Gamma(an)}{(an+j+1)^{k+1}(an+j)!} = a\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nt^n\binom{n+m-1}{n}\int_0^1 x^{an-1}(1-x)^j dx}{(an+j+1)^{k+1}}$$

$$= \frac{amt}{k!}\int_0^{\infty}\int_0^1 \frac{(1-x)^j x^{a-1} y^k e^{-y(a+j+1)}}{(1-tx^a e^{-ay})^{m+1}}\,dxdy. \blacksquare$$

Teorema 1.8. [9] Misalkan a dan b bilangan bulat positif sebarang dimana $a-b \geq 0,\ j \geq 0, k \geq 0, t \in R$ dan $m \geq 1$. Untuk $\left|\frac{tb^b(a-b)^{a-b}}{a^a}\right| \leq 1$, maka:

$$S(a,b,j,k,m,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n\binom{n+m-1}{n}}{(an+j+1)^{k+1}\binom{an+j}{bn}}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{(k-1)!}\int_0^{\infty}\int_0^1 \frac{(1-x)^j y^{k-1} e^{-y(j+1)}}{(1-tx^b(1-x)^{a-b}e^{ay})^m}\,dxdy & , \text{for } k \geq 1 \\ \int_0^1 \frac{(1-x)^j}{(1-tx^b(1-x)^{a-b})^m}\,dx & , \text{for } k = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Bukti. Untuk $k \geq 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n\binom{n+m-1}{n}}{(an+j+1)^{k+1}\binom{an+j}{bn}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n\binom{n+m-1}{n} B(bn+1,(a-b)n+j+1)}{(an+j+1)^k}$$

$$= \frac{1}{(k-1)!}\int_0^{\infty}\int_0^1 (1-x)^j y^{k-1} e^{-y(j+1)} \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+m-1}{n}(tx^b(1-\ x)^{a-b}e^{-ay})^n\,dxdy$$

$$= \frac{1}{(k-1)!}\int_0^{\infty}\int_0^1 \frac{(1-x)^j y^{k-1} e^{-y(j+1)}}{(1-(tx^b(1-x)^{a-b}e^{-ay})^m}\,dxdy.$$

Untuk $k = 0$

$$S(a,b,j,0,m,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n\binom{n+m-1}{n}}{(an+j+1)\binom{an+j}{bn}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n\binom{n+m-1}{n}\Gamma(bn+1)\Gamma(an+j-bn+1)}{\Gamma(an+j+2)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} t^n\binom{n+m-1}{n} B(bn+1,(a-b)n+j+1)$$

$$= \int_0^1 (1-x)^j \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+m-1}{n}(tx^b(1-x)^{a-b})^n dx.$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-x)^j}{(1-tx^b(1-x)^{a-b})^m}\,dx. \blacksquare$$

Selanjutnya akan ditentukan interval dimana deret $S(a,b,j,k,m,t)$ konvergen menuju suatu nilai. Perhatikan bahwa $\frac{t^n\binom{n+m-1}{n}}{(an+j+1)^{k+1}\binom{an+j}{bn}} \leq \frac{t^n\binom{n+m-1}{n}}{(an+1)\binom{an}{bn}}$, Dengan menggunakan uji rasio mutlak, kita dapat

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{t^{n+1}\binom{n+m}{n+1}}{(an+a+1)\binom{an+a}{bn+b}}\,\frac{(an+1)\binom{an}{bn}}{t^n\binom{n+m-1}{n}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{t(n+m)!(bn+b)!(an+a-bn-b)!(an+1)(an)!n!(m-1)!}{(an+a+1)(n+1)!(m-1)!(an+a)!(bn)!(an-bn)!(n+m-1)!}\right|$$

$$= |t| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(an+1)!(bn+b)!(an+a-bn-b)!}{(an+a+1)!(bn)!(an-bn)!}\right| = |t|\left|\frac{b^b(a-b)^{(a-b)}}{a^a}\right| < 1.$$

Sehingga deret $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\binom{n+m-1}{n}}{(an+1)\binom{an}{bn}}$ akan konvergen ketika $|t| < \left|\frac{a^a}{b^b(a-b)^{(a-b)}}\right|$, mengakibatkan deret $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\binom{n+m-1}{n}}{(an+j+1)^{k+1}\binom{an+j}{bn}}$ juga akan konvergen untuk $|t| < \left|\frac{a^a}{b^b(a-b)^{(a-b)}}\right|$.

Contoh 1.9. Untuk kasus $a = 2, b = 1, j = 0, k = 0, m = 5$, kita peroleh bentuk deret

$$S(2,1,0,0,5,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\binom{n+4}{n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}} = \int_0^1 \frac{dx}{(1-tx(1-x))^5}$$

$$\frac{1}{(1-tx(1-x))^m} = 1 + \frac{m}{1!}\big(tx(1-x)\big) + \frac{m(m+1)}{2!}\big(tx(1-x)\big)^2 + \ldots$$

Dengan mengintegrasikan kedua ruas didapat

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-tx(1-x))^m} = \int_0^1 dx + \frac{m}{1!}\int_0^1\big(tx(1-x)\big)dx + \frac{m(m+1)}{2!}\int_0^1\big(tx(1-x)\big)^2 dx + \ldots$$

Jika pengintegralan di ruas kanan diselesaikan maka

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-tx(1-x))^m} = 1 + \frac{m}{6}t + \frac{m(m+1)}{60}t^2 + \frac{m(m+1)(m+2)}{840}t^3 + \cdots$$

Lebih lanjut, dengan manipulasi aljabar akan didapat

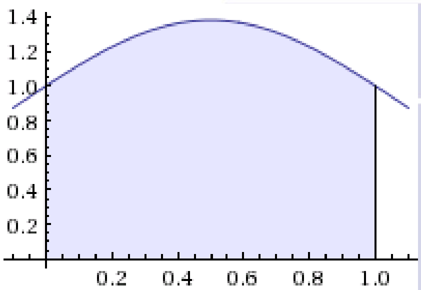
$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-tx(1-x))^m} = 1 + \frac{m}{\left(\frac{3}{2}\right)}\frac{t}{4} + \frac{m(m+1)}{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}+1\right)}\frac{t^2}{16} + \frac{m(m+1)(m+2)}{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}+1\right)\left(\frac{3}{2}+2\right)}\frac{t^3}{64} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1.m}{\left(\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{t}{4}\right) + \frac{1(1+1)m(m+1)}{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}+1\right)2!}\left(\frac{t}{4}\right)^2 + \frac{1(1+1)(1+2)m(m+1)(m+2)}{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}+1\right)\left(\frac{3}{2}+2\right)3!}\left(\frac{t}{4}\right)^3 + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1)_n(m)_n}{\left(\frac{3}{2}\right)_n n!}\left(\frac{t}{4}\right)^n = F_1^2\left(1,m;\ \frac{3}{2};\ \frac{t}{4}\right) \text{ (Berdasarkan Definisi 2.4)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\frac{1}{4}^n\binom{n+5-1}{n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}} = \int_0^1 \frac{dx}{(1-\frac{1}{4}x(1-x))^5} = F_1^2\left(1,5;\ \frac{3}{2};\ \frac{1}{16}\right) \approx 1.2440.$$

Karena deret $S\left(2,1,0,0,5,\frac{1}{4}\right)$ mempunyai representasi dalam bentuk integral, maka jumlah dari deret tersebut juga dapat diinterpretasikan sebagai luas di bawah kurva $y = \frac{1}{(1-\frac{1}{4}x(1-x))^5}$ dengan batas $x = 0$ dan $x = 1$. Adapun interpretasi dari $S\left(2,1,0,0,5,\frac{1}{4}\right) = \int_0^1 \frac{dx}{(1-\frac{1}{4}x(1-x))^5}$ dalam grafik adalah



Gambar 1.1 Interpretasi deret $S\left(2,1,0,0,5,\frac{1}{4}\right)$ dalam bidang-*xy*

Kesimpulan

Simpulan dari kajian paper ini adalah sebagai berikut:

1. Kajian disini hanya dikhususkan untuk deret yang didefinisikan sebagai berikut:

$$S(a,b,j,k,m,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n\binom{n+m-1}{n}}{(an+j+1)^{k+1}\binom{an+j}{bn}}$$

Deret tersebut memiliki bentuk representasi integral

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n\binom{n+m-1}{n}}{(an+j+1)^{k+1}\binom{an+j}{bn}} = \begin{cases} \frac{1}{(k-1)!}\int_0^{\infty}\int_0^1 \frac{(1-x)^j y^{k-1} e^{-y(j+1)}}{(1-tx^b(1-x)^{a-b}e^{-ay})^m}dxdy & ,\text{untuk } k \geq 1 \\ \int_0^1 \frac{(1-x)^j}{(1-tx^b(1-x)^{a-b})^m}dx & ,\text{untuk } k = 0 \end{cases}.$$

2. Analisis kekonvergenan bentuk deret $S(a,b,j,k,m,t)$ akan konvergen pada selang $|t| < \left|\frac{a^a}{b^b(a-b)^{(a-b)}}\right|$. Selanjutnya berdasarkan dari hasil studi kasus, jika disubstitusikan nilai $a = 2, b = 1, j = 0, k = 0, m = 5$, dan $t = \frac{1}{4}$, yakni diperoleh deret

$$S\left(2,1,0,0,5,\frac{1}{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{4})^n\binom{n+4}{n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$

Karena $|t| = \left|\frac{1}{4}\right| < \left|\frac{2^2}{1^1(2-1)^{(2-1)}}\right| = |4|$, maka $S\left(2,1,0,0,5,\frac{1}{4}\right)$ merupakan deret yang konvergen dan dapat ditentukan jumlahnya yaitu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{4}^n\binom{n+5-1}{n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}} = \int_0^1 \frac{dx}{(1-\frac{1}{4}x(1-x))^5} = F_1^2(1,5;\frac{3}{2};\frac{1}{16}) \approx 1.2440.$

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terimakasih kepada pihak-pihak yang mendukung dalam penulisan serta pengkajian paper ini, yaitu untuk

1. Staf pengajar di Jurusan Matematika yang telah menyampaikan ilmunya kepada penulis sebagai landasan bagi paper yang dikaji.
2. Kerabat dekat yang secara tidak langsung turut berkontribusi, serta pihak-pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu-satu.

Referensi

[1] Artin. E. *The Gamma Function.* Holt, Rinehart, dan Winston, New York, 1964.

[2] Bartle. R.G, Sherbert. D.R. *Introduction to Real Analysis: Third edition*. John Wiley & Sons, USA, 2000.

[3] Edwin. J, Purcell. *Kalkulus dan Geometri Analitis: Edisi 5 Jilid 2.* Erlangga, Jakarta, 1998.

[4] Goddard. B, Rosen. Kenneth H. *Elementary Number Theory and Its Applications*, Pearson Addison-Wesley, Boston, 2005.

[5] Kerami. D, Sitanggang. C. *Kamus Matematika.* Balai Pustaka, Jakarta, 2003.

[6] Kohl. Karen T, H. Moll. Victor. *Hypergeometric Function*. Journal of Mathematical Sciences, **21**: 43-54, Chile, 2011.

[7] Krantz. S.C. *The Gamma and Beta Function; Chapter 1*. Vieweg, Braunschweig, Jerman, 1998.

[8] Munir. Rinaldi. *Matematika Diskrit*. Informatika, Bandung, 2005.

[9] Sofo. A. *Double Integral Representation of Sums*, *Journal of Analysis*, Vol. 8, 2009.

[10] Sofo, A. *General Properties Involving Reciprocals of Binomial Coefficients, Journal of Integer Sequences*, Vol. 9, 2006.

[11] Varberg. D, Purcell. *Kalkulus: Edisi 9 Jilid 1*. Erlangga, Jakarta, 2010.