RANK DARI GRUP DIHEDRAL TIGA (D_3) YANG BERAKSI ATAS $X^{(1)}$

Teuis Siti Nurlaela[1,a)], Esih Sukaesih[1)]

[1]UIN Sunan Gunung Djati, Jl. A.H. Nasution No. 105 Bandung

[a)]email: teuis.siti@gmail.com

Abstrak

Misalkan G adalah suatu grup dan X adalah bukan himpunan kosong, maka aksi dari G atas X adalah suatu pemetaan, dengan $g \in G, x \in X$ dan terdapat $xg \in X$ yang bersifat identitas dan asosiatif. Suatu rank dari grup aksi yaitu banyaknya orbit dari grup tersebut. Pada jurnal ini akan ditunjukkan bahwa rank dari grup dihedral 3 (D_3) yang beraksi atas $X^{(1)}$ adalah $n-1$.

Kata Kunci: Grup Dihedral, Aksi, Orbit, Rank.

Abstract

Let G be a group and X is not an empty set, then the action of G over X is a mapping, $g \in G, x \in X$ and $xg \in X$ being identical and associative. A rank of the action group is the number of orbits of the group. In this journal it will be shown that the rank of the dihedral group 3 (D_3) acting on $X^{(1)}$is $n-1$.

Keywords: Dihedral Group, Action, Orbit, Rank.

PENDAHULUAN

Pada tahun 2012 Kibet [8] menghitung rank dari S_n $(n \leq 7)$ atas $X^{(3)}$ dan diperoleh rank nya adalah 3, pada tahun 2014 Kamuti [7] menghitung rank dari S_n $(n \leq 7)$ atas $X^{(4)}$, diperoleh rank nya adalah maksimal 4 dan pada tahun 2014 Gachogu [2] menghitung rank dari D_n atas $X^{(r)}$ dengan $r = n-1$. Pada jurnal ini akan dihitung rank dari grup dihedral tiga (D_3) yang beraksi atas $X^{(1)}$.

DEFINISI

Notasi 2.1 Pada jurnal ini $X^{(1)}$ menotasikan himpunan bagian dari X_n $(X_n = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ yang memiliki elemen berisi himpunan satu elemen.

Definisi 2.2. [5] Misalkan G suatu himpunan tak-kosong dan $*$ suatu operasi biner pada G, G dikatakan grup jika G dan $*$, notasi $(G,*)$ memenuhi sifat-sifat berikut :

1. Jika $a, b \in G$ maka $a * b \in G$. (Sifat tertutup)
2. Diberikan $a, b, c \in G$, maka $a * (b * c) = (a * b) * c$. (Sifat Asosiatif)
3. Terdapat suatu elemen $e \in G$ sedemikian sehingga $a * e = e * a = a$ untuk setiap $a \in G$. (Elemen identitas)
4. Untuk setiap $a \in G$ ada suatu elemen $b \in G$ sedemikian sehingga $a * b = b * a = e$. (Invers)

Definisi 2.3. [1] Grup dihedral-n adalah suatu grup simetri beraturan segi-n. Grup dihedral ke-n dinotasikan oleh D_n [6] dengan banyak elemennya $2n$ yang terdiri dari semua elemen rotasi, elemen simetri dan komposisi dari keduanya,

Definisi 2.4. [6] Misalkan G suatu grup dan X adalah himpunan tak-kosong, untuk setiap $g \in G$ dan $x \in X$, definisikan terdapat elemen $x.g \in X$ harus memenuhi sifat berikut :

a. $x.e = x$ untuk setiap $x \in X$ dan $e \in G$

b. $(x.g).h = x.(gh)$ untuk setiap $x \in X$ dan $g, h \in G$

Definisi 2.5. [8] Misalkan grup G memiliki aksi terhadap himpunan X, untuk setiap $x \in X$ orbit x dinotasikan dengan $orb_G x$. Dengan $orb_G x = \{gx | g \in G\}$.

Definisi 2.6. [12] Misalkan grup G memiliki aksi terhadap himpunan X, diberikan $g \in G$, $x \in X$, x dikatakan titik tetap dari g jika $gx = x$.

Titik tetap dari g dinotasikan dengan $fix(g)$, dengan [8] $fix(g) = \{x \in X | gx = x\}$.

Definisi 2.7. [7] Misalkan G beraksi transitive atas himpunan tak kosong X. orbit $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_3, \cdots, \Delta_{r-1}$ pada G_x atas X dikatakan suborbit dari G. Rank dari G adalah r.

Teorema 1. [6] Misalkan G beraksi atas X, dengan G dan X adalah terbatas. Maka banyaknya orbit adalah :

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|fix\ (g)|$$

RANK DARI GRUP DIHEDRAL TIGA (D_3) YANG BERAKSI ATAS $X^{(1)}$

3.1 Aksi Dari Grup Dihedral 3 (D_3) yang Beraksi atas $X^{(1)}$

Misalkan $G = (D_3)$ dan $X_n = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$

Maka $X^{(1)} = \{\{1\}, \{2\}, \cdots, \{n\}\}$

Aksi dari D_3 atas $X^{(1)}$ adalah $x \cdot g = g^{-1}xg$, dan didefinisikan $(g^{-1}\{x\}g) = \{g^{-1}(x)g\}$.

3.2 Titik Tetap Grup Dihedral Tiga

3.2.1 Titik tetap i

Banyaknya titik tetap dari i adalah n, untuk $n \geq 4$.

atau dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$|fix(i)| = n, \text{ untuk } n \geq 4 \qquad (3.1)$$

Akan dibuktikan bahwa banyaknya titik tetap dari i adalah n untuk $n \geq 4$.

Bukti :

Andaikan bahwa $P(n)$ adalah proposisi bahwa banyaknya titik tetap dari i adalah n, untuk $n \geq 4$.

Akan ditunjukkan $P(4) = 4$, yakni banyaknya titik tetap dari i adalah 4 untuk $n = 4$.

Misalkan $X_4 = \{1, 2, 3, 4\}$, sehingga $X^{(1)} \subset X_4$ yaitu $X^{(1)} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$ jadi $P(4)$ adalah benar, karena

$$\begin{aligned} i\{1\}i = \{i(1)i\} &= \{(1)(1)(1)\} \\ &= \{(1)(1)\} \\ &= \{1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i\{2\}i = \{i(2)i\} &= \{(1)(2)(1)\} \\ &= \{(1)(2)\} \\ &= \{2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i\{3\}i = \{i(3)i\} &= \{(1)(3)(1)\} \\ &= \{(1)(3)\} \\ &= \{3\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i\{4\}i = \{i(4)i\} &= \{(1)(4)(1)\} \\ &= \{(1)(4)\} \\ &= \{4\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Fix(i) &= \{x | xi = x\} \\ &= \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\} \end{aligned}$$

$|Fix(i)| = 4 = n$
Maka $P(4)$ adalah benar.

Selanjutnya akan ditunjukkan jika $P(n)$ benar, maka $P(n+1)$ juga benar.

Misalkan $P(n)$ benar, yaitu asumsikan bahwa banyaknya titik tetap dari i adalah n, untuk $n \geq 4$ Sehingga $i\{x\}i = \{i(x)i\} = \{x\}$ untuk $x \in \{\{1\},\{2\}, \cdots, \{n\}\}$.
Akan ditunjukkan $P(n+1)$ benar, yaitu banyaknya titik tetap dari i adalah $n+1$.
Diketahui $X_n = \{1,2,3,\cdots,n\}$ sehingga $X^{(1)} \subset X_n$ yaitu $X^{(1)} = \{\{1\},\{2\},\cdots,\{n\}\}$ dan $|Fix(i)| = n$.
Misalkan $X_{n+1} = \{1,2,3,\cdots,n,n+1\}$ sehingga $X_n \subset X_{n+1}$.
Karena $i\{x\}i = \{i(x)i\} = \{x\}$ untuk $x \in \{\{1\}, \cdots, \{n\}\}$,
Maka $i\{x\}i = \{i(x)i\} = \{x\}$, untuk setiap $x \in X_n$
Dan

$$
\begin{aligned}
i\{x+1\}i &= \{i(x+1)i\} \\
&= \{(1)(x+1)(1)\} \\
&= \{(1)(x+1)\} \\
&= \{x+1\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Fix(i) &= \{x \mid xi = x\} \\
&= \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\cdots,\{n\},\{n+1\}\}
\end{aligned}
$$

Jadi
$i\{x+1\}i = \{i(x+1)i\} = \{x+1\}$ untuk $x \in X_{n+1}$.
Sehingga banyaknya titik tetap dari i adalah $n+1$.
Maka $P(n+1)$ benar.
Karena $P(4), P(n)$ dan $P(n+1)$ benar maka terbukti bahwa banyaknya titik tetap dari i adalah n, untuk $n \geq 4$.

3.2.2 Titik tetap r

Banyaknya titik tetap dari r adalah $n-3$, untuk $n \geq 4$.
atau dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$|fix(r)| = n-3, \text{ untuk } n \geq 4 \qquad (3.2)$$

Akan dibuktikan bahwa banyaknya titik tetap dari r adalah $n-3$ untuk $n \geq 4$.
Bukti :
Andaikan bahwa $P(n)$ adalah proposisi bahwa banyaknya titik tetap dari r adalah $n-3$, untuk $n \geq 4$.

Akan ditunjukkan $P(4) = 1$, yakni banyaknya titik tetap dari r adalah 1 untuk $n = 4$.

Misalkan $X_4 = \{1,2,3,4\}$, sehingga $X^{(1)} \subset X_4$ yaitu $X^{(1)} = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$ sehingga $P(4)$ adalah benar, karena

$$
\begin{aligned}
r^2\{1\}r &= \{r^2(1)r\} \\
&= \{(1\ \ 3\ \ 2)(1)(1\ \ 2\ \ 3)\} \\
&= \{(1\ \ 3\ \ 2)(3)\} \\
&= \{2\}
\end{aligned}
$$

$r^2\{2\}r = \{r^2(2)r\}$
$= \{(1\ \ 3\ \ 2)(2)(1\ \ 2\ \ 3)\}$
$= \{(1\ \ 3\ \ 2)(1)\}$
$= \{3\}$
$r^2\{3\}r = \{r^2(3)r\}$
$= \{(1\ \ 3\ \ 2)(3)(1\ \ 2\ \ 3)\}$
$= \{(1\ \ 3\ \ 2)(2)\}$
$= \{1\}$
$r^2\{4\}r = \{r^2(4)r\}$

$= \{(1 \quad 3 \quad 2)(4)(1 \quad 2 \quad 3)\}$
$= \{(1 \quad 3 \quad 2)(4)\}$
$= \{4\}$
$Fix(r) = \{x | xr = x\}$
$= \{\{4\}\}$
$|Fix(r)| = 1 = 4 - 3 = n - 3$
Maka $P(4)$ adalah benar.
Selanjutnya akan ditunjukkan jika $P(n)$ benar, maka $P(n+1)$ juga benar.
Misalkan $P(n)$ benar, yaitu asumsikan bahwa banyaknya titik tetap dari r adalah $n-3$, untuk $n \geq 4$ sehingga $r^2\{x\}r = \{r^2(x)r\} = \{x\}$ untuk $x \in \{\{4\}, \cdots, \{n\}\}$.
Akan ditunjukkan $P(n+1)$ benar, yaitu banyaknya titik tetap dari r adalah $(n+1)-3$.
Diketahui $X_n = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ sehingga $X^{(1)} \subset X_n$ yaitu $X^{(1)} = \{\{1\}, \{2\}, \cdots, \{n\}\}$ dan $|Fix(r)| = n - 3$.
Misalkan $X_{n+1} = \{1, 2, 3, \cdots, n, n+1\}$ sehingga $X_n \subset X_{n+1}$.
Karena $r^2\{x\}r = \{r^2(x)r\} = \{x\}$ untuk $x \in \{\{4\}, \cdots, \{n\}\}$,
Maka $r^2\{x\}r = \{r^2(x)r\} = \{x\}$, untuk setiap $x \in X_n$
Dan
$r^2\{x+1\}r = \{r^2(x+1)r\}$
$= \{(1 \quad 3 \quad 2)(x+1)(1 \quad 2 \quad 3)\}$
$= \{(1 \quad 3 \quad 2)(x+1)\}$
$= \{x+1\}$
$Fix(r) = \{x | xr = x\}$
$= \{\{4\}, \cdots, \{n\}, \{n+1\}\}$
Jadi
$r^2\{x+1\}r = \{r^2(x+1)r\} = \{x+1\}$ untuk $x \in X_{n+1}$.
Sehingga banyaknya titik tetap dari r adalah $(n+1) - 3$.
Maka $P(n+1)$ benar.
Karena $P(4), P(n)$ dan $P(n+1)$ benar maka terbukti bahwa banyaknya titik tetap dari r adalah $n-3$, untuk $n \geq 4$.

3.2.3 Titik tetap r^2

Banyaknya titik tetap dari r^2 adalah $n-3$, untuk $n \geq 4$.
atau dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$|fix(r^2)| = n - 3, \text{ untuk } n \geq 4 \qquad (3.3)$$

Untuk pembuktian serupa dengan bukti 3.2.2

3.2.4 Titik tetap s

Banyaknya titik dari s adalah n, untuk $n \geq 4$.
atau dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$|fix(s)| = n, \text{ untuk } n \geq 4 \qquad (3.4)$$

Untuk pembuktian serupa dengan bukti 3.2.1

3.2.5 Titik tetap sr

Banyaknya titik dari sr adalah n, untuk $n \geq 4$.
atau dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$|fix(sr)| = n, \text{ untuk } n \geq 4 \qquad (3.5)$$

Untuk pembuktian serupa dengan bukti 3.2.1

3.2.6 Titik tetap sr^2

Banyaknya titik dari sr adalah n, untuk $n \geq 4$.
atau dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$|fix(sr)| = n, \text{untuk } n \geq 4 \qquad (3.6)$$

Untuk pembuktian serupa dengan bukti 3.2.1

RANK DARI GRUP DIHEDRAL TIGA (D_3) YANG BERAKSI ATAS $X^{(1)}$

Dengan menggunakan teorema Cauchy-Frobenius diperoleh rank dari grup dihedral 3 (D_3) yang beraksi atas $X^{(1)}$ adalah $n-1$, untuk $n \geq 4$.

Akan dibuktikan bahwa Rank dari D_3 yang beraksi atas $X^{(1)}$ adalah $n-1$, $n = |X^{(1)}| = \binom{n}{1}$ untuk $n \geq 4$.

Bukti :

Andaikan bahwa $P(n)$ adalah proposisi bahwa banyaknya rank dari D_3 yang beraksi atas $X^{(1)}$ adalah $n-1$, untuk $n \geq 4$.

Akan ditunjukkan $P(4) = 3$, yaitu banyaknya rank dari D_3 yang beraksi atas $X^{(1)}$ adalah 3, untuk $n = 4$.

Berdasarkan (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) dan (3.6) maka
$P(4)$ adalah benar, karena

$$\begin{aligned}
\text{Rank} &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|fix\ (g)| \\
&= \frac{1}{|D_3|}(|fix(i)| + |fix(r)| + |fix(r^2)| + |fix(s)| + |fix(sr)| + |fix(sr^2)|) \\
&= \frac{1}{6}\big((n) + (n-3) + (n-3) + (n) + (n) + (n)\big) \\
&= \frac{1}{6}\big((4) + (4-3) + (4-3) + (4) + (4) + (4)\big) \\
&= \frac{1}{6}\big((4) + (1) + (1) + (4) + (4) + (4)\big) \\
&= \frac{1}{6}(18) \\
&= 3 = 4 - 1 = n - 1
\end{aligned}$$

Maka $P(4)$ adalah benar.

Andaikan $P(n)$ benar, yaitu asumsikan bahwa banyaknya rank dari D_3 yang beraksi atas $X^{(1)}$ adalah $n-1$, untuk $n \geq 4$.

Akan ditunjukkan $P(n+1)$ benar.

Berdasarkan (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) dan (3.6) maka

$$\begin{aligned}
\text{Rank} &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|fix\ (g)| \\
&= \frac{1}{|D_3|}(|fix(i)| + |fix(r)| + |fix(r^2)| + |fix(s)| + |fix(sr)| + |fix(sr^2)|) \\
&= \frac{1}{6}((n+1) + \big((n+1)-3\big) + \big((n+1)-3\big) + (n+1) + (n+1) \\
&\quad +(n+1)) \\
&= \frac{1}{6}(6(n+1) - 6) \\
&= (n+1) - 1
\end{aligned}$$

Sehingga banyaknya titik tetap di sr^2 adalah $(n+1)-1$.
Maka $P(n+1)$ adalah benar.

Karena $P(4), P(n)$ dan $P(n+1)$ benar maka terbukti bahwa banyaknya rank dari D_3 yang beraksi atas $X^{(1)}$ adalah $n-1$ untuk $n \geq 4$.

KESIMPULAN

Rank dari grup dihedral 3 (D_3) yang beraksi atas $X^{(1)}$ adalah $n-1$, untuk $n \geq 4$, tetapi pada jurnal ini terdapat perbedaan antara rank yang diperoleh dari terorema dengan rank yang diperoleh dari definisi.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Fraleigh, J.B., *A First Course In Abstract Algebra: Fifth Edition*. Addison-Wesley Publishing Company, USA, 1994.

[2] Gallian, J.A., *Contemporary Abstract Algebra: Seventh Edition.* Brooks/Cole, Cengage Learning, USA, 2010.

[3] Herstein, I.N., *Abstract Algebra : Third Edition*. Prentice-Hall, Inc, USA, 1996.

[4] Herstein, I.N., *Topics In Algebra : Second Edition*. Xerox Corporation, Singapura, 1975.

[5] Isaacs, I.M., *Algebra A graduate Cours*, Brooks/Cole Publishing Company, California, 1994.

[6] Kamuti, I. N, Leonard M.S., On The Action of The Symmetric Group, S_n , $n \leq 7$ on Unordered Quadruples, $(X^{(4)})$. *International Journal Algebra*., **8(3)** : 115 – 120, 2014.

[7] Munir, R., *Matematika Diskrit : Edisi Empat*. Informatika, Bandung, 2010.

[8] Setiawan, A., *Aljabar Abstrak (Teori Grup dan Teori Ring), Diktat Kuliah*. Universitas Kristen SatyaWacana, Salatiga, 2011.

[9] Spence, L.E, dkk, Linear Algebra:Fourth Edition. Pearson Education,

[10] Spindler, K., Abstract Algebra With Applications. Marcel Dekker, INC, New York, 1994.