Penentuan Solusi Optimal Pemrograman Kuadratik Menggunakan Metode Beale (Studi Kasus: Produksi Padi Kalimantan Barat)

Rina Robiah Adawiah[1, a)], Mariatul Kiftiah[1, b)], dan Meliana Pasaribu[1, c)]

[1]*Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Tanjungpura, Pontianak, Indonesia.*

[a)] *email: rina.robiah@student.untan.ac.id*
[b)] *email: kiftiahmariatul@math.untan.ac.id*
[c)] *email: meliana.pasaribu@math.untan.ac.id*

Abstrak

Hasil produksi padi pada suatu daerah dipengaruhi oleh luas lahan panen padi. Data BPS menunjukkan bahwa pada tahun 2019-2021 terjadi penurunan produksi padi di Kalimantan Barat yang diakibatkan oleh penurunan luas panen padi. Oleh karena itu, pemanfaatan luas panen yang optimal sangat diperlukan untuk memperoleh rata-rata produksi padi yang maksimum. Salah satu metode untuk menentukan solusi optimal dari masalah pemrograman kuadratik adalah metode Beale. Pada penelitian ini, permasalahan produksi padi diformulasikan ke dalam model matematika. Selanjutnya dibentuk fungsi tujuan kuadratik yang merupakan fungsi konkaf dengan menyelesaikan persamaan linear melalui pendekatan matriks. Fungsi yang terpilih diselesaikan menggunakan metode Beale. Metode Beale dimulai dengan menyatakan variabel basis ke dalam variabel non basis pada setiap proses iterasi. Solusi optimal metode Beale diperoleh ketika nilai evaluasi semua turunan parsial fungsi tujuan kurang dari sama dengan nol. Berdasarkan hasil penelitian, diperoleh luas panen padi Kabupaten Mempawah, Sintang, Kapuas Hulu, dan Kubu Raya masing-masing $17.799{,}53424$ ha, $16.364{,}0143$ ha, $6.105{,}685658$ ha, dan $32.959{,}2823$ ha, sehingga rata-rata produksi padi maksimumnya adalah sebesar $127{,}6827216$ kw/ha.

Kata kunci: basis, non-basis, turunan parsial, fungsi konkaf

Abstract

Rice production in an area is influenced by the area of rice harvesting land. BPS data shows that in 2019-2021 there was a decrease in rice production in West Kalimantan due to a decrease in rice harvest areas. Therefore, optimal utilization of harvested area is needed to obtain maximum average rice production. One method to determine the optimal solution of a quadratic programming problem is the Beale method. In this research, the problem of rice production is formulated into a mathematical model. Furthermore, a quadratic objective function is formed which is a concave function by solving linear equations through a matrix approach. The selected function is solved using the Beale method. The Beale method begins by expressing the base variable into a non-base variable in each iteration process. The optimal solution of the Beale method is obtained when the evaluation value of all partial derivatives of the objective function is less than equal to zero. Based on the research results, the rice harvest area of Mempawah, Sintang, Kapuas Hulu, and Kubu Raya districts

were 17,799.53424 ha, 16,364.0143 ha, 6,105.685658 ha, and 32,959.2823 ha, respectively, so that the average maximum rice production was 127.6827216 kw/ha.
Keywords: basis, non-basis, partial derivative, concave function

Pendahuluan

Optimasi merupakan pencarian nilai terbaik, baik minimum atau maksimum dari fungsi yang diberikan pada suatu konteks permasalahan [1], [2]. Tujuan utama optimasi adalah untuk mendapatkan solusi yang terbaik dengan mempertimbangkan sumber daya yang ada. Biasanya sumber daya yang digunakan meliputi tenaga kerja, uang, material yang merupakan input, waktu dan ruang [3]. Terdapat salah satu teknik matematika yang bisa digunakan dalam menyelesaikan masalah optimasi adalah pemrograman kuadratik.

Permasalahan optimasi dengan fungsi tujuan atau fungsi kendalanya merupakan fungsi *non*-linear disebut pemrograman *non*-linear [4]. Oleh karena itu, pemrograman kuadratik merupakan pemrograman *non*-linear karena fungsi objektifnya berupa fungsi *non*-linear, akan tetapi untuk fungsi kendala yang dimiliki berupa fungsi kendala linear. Jadi perbedaan masalah pemrograman kuadratik dan pemrograman linear berada pada fungsi tujuannya yang salah satunya melibatkan variabel x_j^2 dan $x_i x_j$ $(i \neq j)$ [5], [6]. Permasalahan *non*-linear yaitu pemrograman kuadratik tidak hanya terjadi dalam bidang bisnis dan portofolio saja, akan tetapi bisa juga terjadi dalam bidang pertanian [7]. Dalam pemrograman kuadratik, salah satu metode dalam menentukan solusi optimal masalah optimasi adalah metode Beale. Metode Beale merupakan metode untuk menyelesaikan masalah pemrograman kuadratik dengan tidak menggunakan kondisi Kuhn-Tucker [8].

Permasalahan optimasi tentang pemrograman kuadratik menggunakan metode Beale berdasarkan pada penelitian yang membahas tentang optimasi rata-rata produksi kelapa di Kabupaten Indragiri Hilir [9]. Dalam penelitiannya, permasalahan produksi kelapa dimodelkan ke dalam pemrograman kuadratik dan diselesaikan menggunakan metode Wolfe yaitu membentuk fungsi tujuan baru yang linear. Penelitian lainnya yaitu tentang penyelesaian masalah pemrograman kuadratik menggunakan metode Beale pada kasus produksi padi di Kota Balikpapan [10]. Dalam penelitiannya, permasalahan dimodelkan ke dalam pemrograman kuadratik dan diselesaikan dengan menggunakan metode Beale, sehingga memperoleh luas panen yang optimal. Selain itu, penelitian tentang metode Beale juga pernah dibahas penerapannya pada masalah portofolio saham sehingga menghasilkan proporsi saham yang optimal [4]. Artikel ini juga merujuk pada pustaka sekunder yang membahas mengenai algoritma metode Beale, dan membahas tentang bentuk umum pemrograman kuadratik [11], [12].

Dalam penelitian ini, pemrograman kuadratik diterapkan pada bidang pertanian yaitu produksi tanaman padi. Tanaman padi merupakan sumber karbohidrat dengan komoditas strategis di banyak negara dan bahkan hampir separuh dari penduduk dunia mengandalkan padi dalam kehidupannya [13]. Pemerintah menargetkan Indonesia sebagai lumbung pangan dunia pada tahun 2045, sehingga produksi tanaman padi perlu ditingkatkan di Indonesia [14]. Peningkatan produksi padi dihadapkan pada berbagai masalah, salah satunya yaitu menciutnya ketersediaan luas dari lahan pertanian[15]. Oleh karena itu, diperlukan pemanfaatan luas lahan secara optimal.

Kalimantan Barat merupakan salah satu provinsi di Indonesia yang juga memproduksi tanaman padi dalam memenuhi kebutuhan penduduk. Berdasarkan data Badan Pusat Statistik (BPS) Kalimantan Barat, produksi padi mengalami penurunan pada tahun 2019-2021. Penurunan produksi padi diakibatkan oleh penurunan luas panen padi, sehingga diperlukan pemanfaatan luas panen padi yang optimal untuk memperoleh rata-rata produksi padi yang maksimum. Terdapat salah satu faktor penentu rata-rata produksi padi adalah luas panen yang dibatasi oleh luas tanam. Oleh karena itu, tujuan dari penelitian ini adalah menentukan luas panen yang optimal pada permasalahan rata-rata produksi padi di Kalimantan Barat dengan menggunakan metode Beale.

Metode

Pemrograman kuadratik atau *Quadratic Programming* (QP) merupakan pemrograman *non*-linear, dengan fungsi tujuan berupa *non*-linear yaitu fungsi kuadrat, dan fungsi kendalanya itu berupa fungsi linear [12], [16]. Permasalahan pemrograman kuadratik adalah mencari nilai minimum atau maksimum dari fungsi kuadrat dengan batasan yang merupakan pertidaksamaan atau persamaan linear [17]. Berikut merupakan bentuk umum masalah pemrograman kuadratik menggunakan notasi matriks [12]:

$$\text{Optimalkan (Maks atau Min) Z} = \mathbf{cx} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \tag{1}$$

dengan kendala

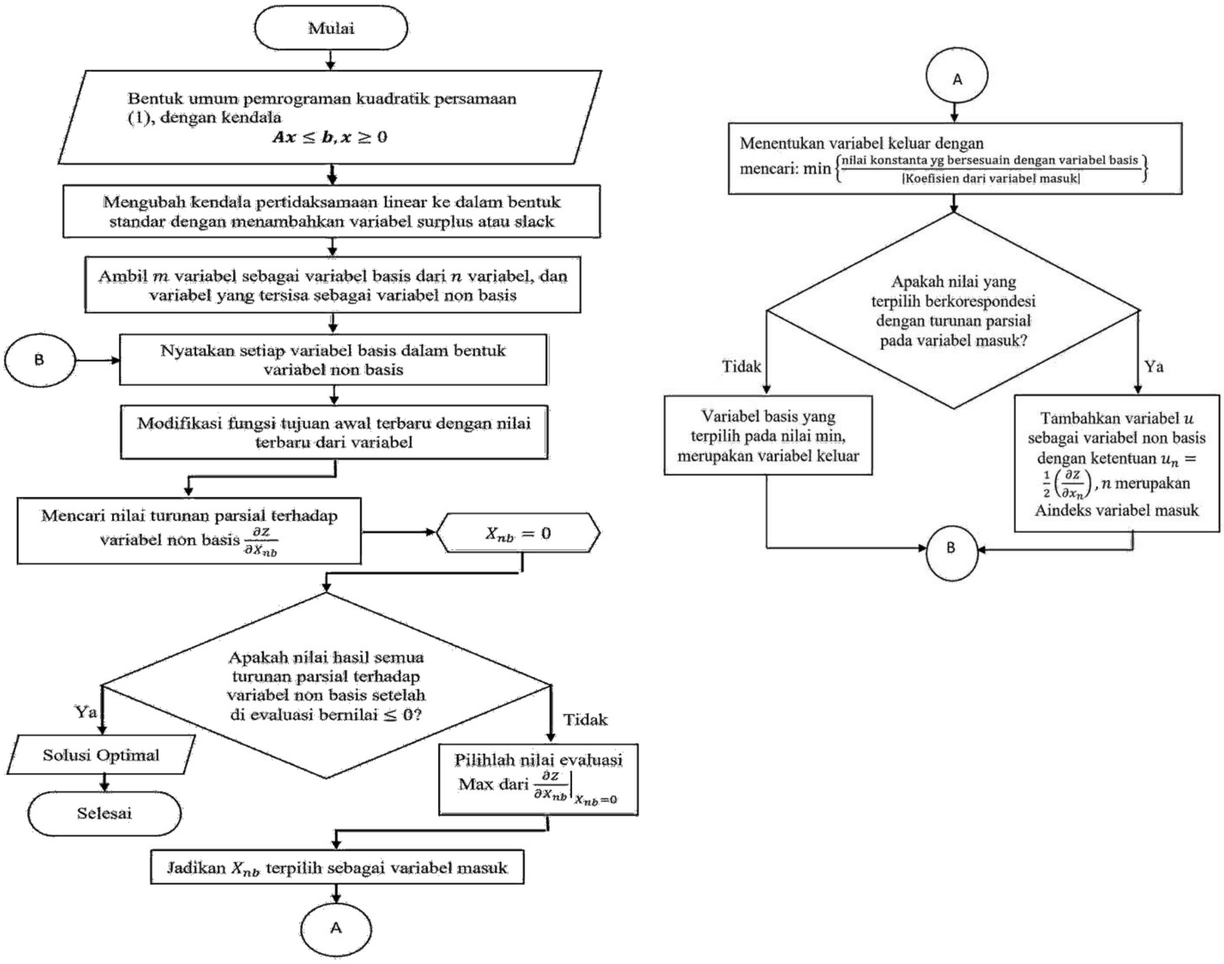
$$\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq 0$$

dimana

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$;
$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$;
$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$;
$\boldsymbol{D} = [d_{jk}]$ adalah matriks simetris $n \times n$, $d_{jk} = d_{kj}$;
$A = [a_{ij}]$ adalah matriks $m \times n$.

Selanjutnya model pemrograman kuadratik diselesaikan dengan menggunakan metode Beale. Metode Beale pertama kali ditemukan oleh Evelyn Martin Lansdowne Beale. Metode ini bertujuan untuk menentukan solusi optimal pada masalah pemrograman kuadratik, yang dalam proses penyelesaiannya menggunakan hasil dari kalkulus.

Pada penelitian ini data yang digunakan berupa data rata-rata produksi padi, luas panen dan luas tanam Kalimantan Barat. Data tersebut selanjutnya diformulasikan ke dalam model matematika, membentuk fungsi tujuan kuadratik dengan menyelesaikan persamaan linear. Selanjutnya fungsi tujuan yang terbentuk dianalisis apakah merupakan fungsi konkaf atau tidak. Jika fungsi tersebut bukan merupakan fungsi konkaf, maka eliminasi fungsi tujuan dari permasalahan tersebut. Jika fungsi tersebut merupakan fungsi konkaf, maka diselesaikan dengan metode Beale. Solusi optimal menggunakan metode Beale diperoleh ketika nilai evaluasi semua turunan parsial terhadap variabel non basis kurang dari sama dengan nol. Berikut merupakan algoritma yang lebih spesifik tentang metode Beale yang digambarkan melalui *flowchart* pada Gambar 1 [10], [11].



Gambar 1. *Flowchart* penyelesaian pemrograman kuadratik menggunakan metode Beale

Hasil dan Diskusi

Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data sekunder yang didapat dari BPS Kalimantan Barat dalam publikasinya yang berjudul “Kalimantan Barat dalam Angka 2019-2021”. Data tersebut meliputi data luas panen, luas tanam, dan rata-rata produksi padi tahun 2019-2021 pada 12 kabupaten dan dua kota yang ada di Kalimantan Barat. Oleh karena itu, variabel keputusan pada masalah rata-rata produksi padi, yaitu:

x_1: Luas panen padi Kabupaten Sambas (ha)
x_2: Luas panen padi Kabupaten Bengkayang (ha)
x_3: Luas panen padi Kabupaten Landak (ha)
x_4: Luas panen padi Kabupaten Mempawah (ha)
x_5: Luas panen padi Kabupaten Sanggau (ha)
x_6: Luas panen padi Kabupaten Ketapang (ha)
x_7: Luas panen padi Kabupaten Sintang (ha)
x_8: Luas panen padi Kabupaten Kapuas Hulu (ha)
x_9: Luas panen padi Kabupaten Sekadau (ha)
x_{10}: Luas panen padi Kabupaten Melawi (ha)
x_{11}: Luas panen padi Kabupaten Kayong Utara (ha)
x_{12}: Luas panen padi Kabupaten Kubu Raya (ha)
x_{13}: Luas panen padi Kota Pontianak (ha)

x_{14}: Luas panen padi Kota Singkawang (ha)
Selanjutnya, dilakukan pembentukan fungsi tujuan untuk rata-rata produksi padi di Kalimantan Barat berdasarkan fungsi tujuan kuadrat, yaitu

$$f(x_i) = \beta_{1i}x_i^2 + \beta_{2i}x_i + \beta_{3i} \tag{2}$$

Koefisien fungsi tujuan dapat ditentukan dengan menyelesaikan sistem persamaan linear berikut [10]

$$A_i\beta_i = Y_i \tag{3}$$

dengan,

$$A_i = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^4 & \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^3 & \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^2 \\ \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^3 & \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^2 & \sum_{j=1}^{3} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^2 & \sum_{j=1}^{3} x_{ij} & 3 \end{bmatrix}, \beta_i = \begin{bmatrix} \beta_{1i} \\ \beta_{2i} \\ \beta_{3i} \end{bmatrix}, Y_i = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^2 y_{ij} \\ \sum_{j=1}^{3} x_{ij} y_{ij} \\ \sum_{j=1}^{3} yi_j \end{bmatrix}$$

dengan,
x_{ij} = Luas panen padi dari Kabupaten ke$-i$ pada tahun ke$-j$
y_{ij} = Rata-rata produksi padi dari Kabupaten ke$-i$ pada tahun ke$-j$, i: 1,2, … ,14, j: 1,2,3.

Sistem persamaan linear dapat diselesaikan dengan cara analitis salah satunya menggunakan aturan cramer, yaitu dengan mencari koefisien fungsi tujuan Persamaan (3) yaitu $\beta_{1i}, \beta_{2i}, dan\ \beta_{3i}$ [10]. Dengan demikian, dapat dicari $\beta_{1i}, \beta_{2i}, dan\ \beta_{3i}$ dengan cara sebagai berikut:

$$\beta_{1i} = \frac{\det\left(\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^2 y_{ij} & \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^3 & \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^2 \\ \sum_{j=1}^{3} x_{ij} y_{ij} & \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^2 & \sum_{j=1}^{3} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^{3} y_{ij} & \sum_{j=1}^{3} x_{ij} & 3 \end{bmatrix}\right)}{\det\left(\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^4 & \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^3 & \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^2 \\ \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^3 & \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^2 & \sum_{j=1}^{3} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^2 & \sum_{j=1}^{3} x_{ij} & 3 \end{bmatrix}\right)} =;\ \beta_{2i}$$

$$= \frac{\det\left(\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^4 & \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^2 y_{ij} & \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^2 \\ \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^3 & \sum_{j=1}^{3} x_{ij} y_{ij} & \sum_{j=1}^{3} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^2 & \sum_{j=1}^{3} y_{ij} & 3 \end{bmatrix}\right)}{\det\left(\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^4 & \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^3 & \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^2 \\ \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^3 & \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^2 & \sum_{j=1}^{3} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^2 & \sum_{j=1}^{3} x_{ij} & 3 \end{bmatrix}\right)};$$

$$\beta_{3i} = \frac{\det\left(\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^4 & \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^3 & \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^2 y_{ij} \\ \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^3 & \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^2 & \sum_{j=1}^{3} x_{ij} y_{ij} \\ \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^2 & \sum_{j=1}^{3} x_{ij} & \sum_{j=1}^{3} y_{ij} \end{bmatrix}\right)}{\det\left(\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^4 & \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^3 & \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^2 \\ \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^3 & \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^2 & \sum_{j=1}^{3} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^2 & \sum_{j=1}^{3} x_{ij} & 3 \end{bmatrix}\right)}.$$

Sebagai contoh, diperoleh $\beta_{11}, \beta_{21}, dan\ \beta_{31}$ untuk kabupaten Sambas sebagai berikut

$$\beta_{11} = \frac{\det(A_{11})}{\det(A_1)} = \frac{5{,}24861 \times 10^{17}}{3{,}27608 \times 10^{21}} = 0{,}00016021;$$

$$\beta_{21} = \frac{\det(A_{21})}{\det(A_1)} = \frac{-6{,}59747 \times 10^{22}}{3{,}27608 \times 10^{21}} = -20{,}13828532,$$

$$\beta_{31} = \frac{\det(A_{31})}{\det(A_1)} = \frac{2{,}14311 \times 10^{27}}{3{,}27608 \times 10^{21}} = 654.167{,}3882.$$

Substitusi hasil $\beta_{11}, \beta_{21}, dan\ \beta_{31}$ ke dalam Persamaan (2), sehingga diperoleh fungsi tujuan rata-rata produksi padi untuk Kabupaten Sambas

$$f(x_1) = 0{,}00016021x_1^2 - 20{,}13828532x_1 + 654.167{,}3882.$$

Dengan cara yang sama, fungsi tujuan rata-rata produksi padi untuk masing masing Kabupaten/Kota:

$$\begin{gathered}
f(x_1) = 0{,}00016021x_1^2 - 20{,}13828532x_1 + 654.167{,}3882;\\
f(x_2) = 0{,}000852701x_2^2 - 18{,}10850581x_2 + 124.257{,}8816;\\
f(x_3) = 0{,}006743374x_3^2 - 373{,}188789x_3 + 5.192.119{,}429;\\
f(x_4) = -0{,}000384458x_4^2 + 13{,}68634667x_4 - 84.681{,}8819;\\
f(x_5) = 0{,}00000292224x_5^2 + 0{,}235800322x_5 + 18.180{,}32924;\\
f(x_6) = 0{,}000201899x_6^2 - 13{,}13494426x_6 + 246.664{,}9576;\\
f(x_7) = -0{,}000041149x_7^2 + 1{,}346725654x_7 + 18.198{,}95388;\\
f(x_8) = -0{,}000406614x_8^2 + 4{,}965314536x_8 + 15.388{,}75016;\\
f(x_9) = 0{,}0000406073x_9^2 - 1{,}727535254x_9 + 43.085{,}26171;\\
f(x_{10}) = 0{,}004300915x_{10}^2 - 34{,}95251293x_{10} + 97.640{,}92626;\\
f(x_{11}) = 0{,}007979382x_{11}^2 - 225{,}8457997x_{11} + 1.614.760{,}05;\\
f(x_{12}) = -0{,}0000258134x_{12}^2 + 1{,}701582276x_{12} + 2.752{,}89223;\\
f(x_{13}) = 15{,}57287754x_{13}^2 - 5208{,}532568x_{13} + 462.628{,}181;\\
f(x_{14}) = 0{,}587381121x_{14}^2 - 4292{,}631366x_{14} + 7.876.451{,}167.
\end{gathered}$$

Selanjutnya, dicari matriks Hessian pada masing masing kabupaten/kota, dengan ketentuan jika $H(f(x_i)) < 0$ maka fungsi yang didapat adalah fungsi konkaf. Karena dalam penelitian ini bertujuan memaksimumkan rata-rata produksi padi, jadi fungsi yang diambil harus merupakan fungsi konkaf [9]. Sebagai contoh untuk menganalisis $f(x_4)$ merupakan fungsi konkaf sebagai berikut:

Diketahui: $f(x_4) = -0{,}000384458x_4^2 + 13{,}68634667x_4 - 84.681{,}8819$; sehingga diperoleh,

$$H_{f(x_4)} = \left[\frac{\partial^2 f(x_4)}{\partial x_4^2}\right] = -0{,}000768916 < 0.$$

Dengan Langkah yang sama diperoleh fungsi konkaf yaitu $f(x_4), f(x_7), f(x_8)$, dan $f(x_{12})$, dan fungsi yang tidak konkaf (konveks) dieliminasi dari permasalahan. Selanjutnya terbentuklah fungsi tujuan pemrograman kuadratik yaitu jumlahan dari $f(x_i)$ yang terpilih.

Lebih lanjut diperoleh:

$$Maks\ Z = f(x_4) + f(x_7) + f(x_8) + f(x_{12})$$

dengan kendala,

Luas Panen ≤ Maks. Luas Tanam

Yaitu, maksimumkan

$$\begin{aligned}
Z = (&-0{,}000384458x_4^2 + 13{,}68634667x_4 - 84.681{,}8819) + (-0{,}000041149x_7^2\\
&+ 1{,}346725654x_7 + 18.198{,}95388) + (-0{,}000406614x_8^2\\
&+ 4{,}965314536x_8 + 15.388{,}75016) + (-0{,}0000258134x_{12}^2\\
&+ 1{,}701582276x_{12} + 2.752{,}89223);
\end{aligned} \tag{4}$$

dengan kendala,

$$x_4 \le 57.606{,}53;$$
$$x_7 \le 30.516{,}37;$$
$$x_8 \le 23.592{,}27; \quad (5)$$
$$x_{12} \le 109.220{,}67;$$
$$x_4 \ge 0;\ x_7 \ge 0;\ x_8 \ge 0;\ x_{12} \ge 0.$$

Selanjutnya, Persamaan (4) dan Pertidaksamaan (5) diselesaikan menggunakan metode Beale yaitu
Langkah 1, mengubah kendala Pertidaksamaan (5) yang linear menjadi bentuk standar yaitu dengan menambahkan variabel slack, diperoleh

$$x_4 + s_1 = 57.606{,}53;$$
$$x_7 + s_2 = 30.516{,}37;$$
$$x_8 + s_3 = 23.592{,}27;$$
$$x_{12} + s_4 = 109.220{,}67;$$
$$x_4 \ge 0;\ x_7 \ge 0;\ x_8 \ge 0;\ x_{12} \ge 0; s_1 \ge 0; s_2 \ge 0; s_3 \ge 0; s_4 \ge 0.$$

Langkah 2, diperoleh $m = 4$ dan $n = 8$, dengan demikian terdapat empat variabel basis dan $8 - 4 = 4$ variabel non basis, yaitu: $x_b = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}, x_{nb} = \{x_4, x_7, x_8, x_{12}\}$.
Langkah 3, menyatakan variabel basis ke dalam variabel non basis, menjadi

$$s_1 = 57.606{,}53 - x_4;$$
$$s_2 = 30.516{,}37 - x_7;$$
$$s_3 = 23.592{,}27 - x_8;$$
$$s_4 = 109.220{,}67 - x_{12};$$

dengan fungsi tujuannya yaitu Persamaan (4).
Selanjutnya dicari turunan parsial dari Persamaan (4) terhadap variabel non basis untuk mencari nilai optimal, yaitu

$$\frac{\partial Z}{\partial x_4} = -0{,}000768916x_4 + 13{,}68634667;$$
$$\frac{\partial Z}{\partial x_7} = -0{,}000082298x_7 + 1{,}346725654;$$
$$\frac{\partial Z}{\partial x_8} = -0{,}000813228x_8 + 4{,}965314536;$$
$$\frac{\partial Z}{\partial x_{12}} = -0{,}0000516268x_{12} + 1{,}701582276.$$

Langkah 4, mengevaluasi hasil turunan parsial dengan mendefinisikan $x_{nb} = 0$, didapat

$$\frac{\partial Z}{\partial x_4} = 13{,}68634667 > 0;$$
$$\frac{\partial Z}{\partial x_7} = 1{,}346725654 > 0;$$
$$\frac{\partial Z}{\partial x_8} = 4{,}965314536 > 0;$$
$$\frac{\partial Z}{\partial x_{12}} = 1{,}701582276 > 0.$$

Karena nilai evaluasi pada hasil turunan parsial terdapat nilai yang > 0, dengan demikian solusi belum optimal dan dilakukan proses iterasi.

Iterasi 1.

Langkah 5, menentukan variabel masuk yaitu dengan memilih nilai maksimum evaluasi $\frac{\partial Z}{\partial x_{nb}}$,

$$max\left\{\frac{\partial Z}{\partial x_4}, \frac{\partial Z}{\partial x_7}, \frac{\partial Z}{\partial x_8}, \frac{\partial Z}{\partial x_{12}}\right\} = max\{13{,}68634667;\ 1{,}346725654;\ 4{,}965314536; 1{,}701582276\}$$
$$= 13{,}68634667.$$

Pada langkah ini, terpilih variabel masuknya yaitu x_4 dengan nilai evaluasi turunan parsialnya yaitu 13,68634667.

Langkah 6, menentukan variabel keluar dengan mencari nilai min dari aturan,

$$\min\left\{\frac{\text{Nilai konstanta yang bersesuaian dengan variabel basis}}{|\text{Koefisien dari variabel masuk}|}\right\}$$

Dalam hal ini menjadi,

$$min\left\{\frac{57.606{,}53}{|-1|},\frac{30.516{,}37}{|0|},\frac{23.592{,}27}{|0|},\frac{109.220{,}67}{|0|},\frac{13{,}68634667}{|-0{,}000768916|}\right\} = 17.799{,}53424.$$

Nilai yang terpilih adalah nilai yang berkorespondensi dengan turunan parsial pada variabel masuk x_4. Dengan demikian diberikan variabel non basis baru u dengan ketentuan:

$u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Z}{\partial x_n}\right)$, n merupakan indeks variabel masuk. Karena variabel masuk pada iterasi ini adalah x_4 menjadi:

$$u_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Z}{\partial x_4}\right) = \frac{1}{2}(-0{,}000768916x_4 + 13{,}68634667)$$
$$u_4 = -0{,}000384458x_4 + 6{,}843173335.$$

Dengan demikian didapat variabel basis dan variabel non basis pada iterasi ini yaitu

$$x_b = \{s_1, s_2, s_3, s_4, x_4\}, x_{nb} = \{u_4, x_7, x_8, x_{12}\}.$$

Selanjutnya, dilakukan kembali uji optimalitas seperti pada Langkah 3.

Langkah 3, menyatakan variabel basis ke dalam variabel non basis, menjadi,

$$u_4 = -0{,}000384458x_4 + 6{,}843173335;$$
$$\Leftrightarrow u_4 + 0{,}000384458x_4 = 6{,}843173335;$$
$$\Leftrightarrow x_4 = 17.799{,}53424 - 2.601{,}064356u_4.$$

Substitusi $x_4 = 17.799{,}53424 - 2.601{,}064356u_4$ ke dalam persamaan berikut

$$s_1 = 57.606{,}53 - x_4;$$
$$s_1 = 57.606{,}53 - (17.799{,}53424 - 2.601{,}064356u_4);$$
$$s_1 = 39.806{,}99576 + 2.601{,}064356u_4;$$
$$s_2 = 30.516{,}37 - x_7;$$
$$s_3 = 23.592{,}27 - x_8;$$
$$s_4 = 109.220{,}67 - x_{12}.$$

Modifikasi Persamaan (4) dengan nilai terbaru yaitu

$$\begin{aligned}\max Z = {} & (-0{,}000384458(17.799{,}53424 - 2.601{,}064356u_4)^2 + 13{,}68634667(17.799{,}53424 \\ & - 2.601{,}064356u_4) - 84.681{,}8819) + (-0{,}000041149x_7^2 + 1{,}346725654x_7 \\ & + 18.198{,}95388) + (-0{,}000406614x_8^2 + 4{,}965314536x_8 + 15.388{,}75016) \\ & + (-0{,}0000258134x_{12}^2 + 1{,}701582276x_{12} + 2.752{,}89223);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \max Z = {} & (37.123{,}41619 - 2.601{,}064356u_4^2) \\ & + (-0{,}000041149x_7^2 + 1{,}346725654x_7 + 18.198{,}95388) \\ & + (-0{,}000406614x_8^2 + 4{,}965314536x_8 + 15.388{,}75016) \\ & + (-0{,}0000258134x_{12}^2 + 1{,}701582276x_{12} + 2.752{,}89223).\end{aligned} \quad (6)$$

Selanjutnya mencari turunan parsial dari Persamaan (6) terhadap variabel non basis untuk mencari nilai optimal, yaitu

$\frac{\partial Z}{\partial u_4} = -5.202{,}128711u_4;$

$\frac{\partial Z}{\partial x_7} = -0{,}000082298x_7 + 1{,}346725654;$

$\frac{\partial Z}{\partial x_8} = -0{,}000813228x_8 + 4{,}965314536;$

$\frac{\partial Z}{\partial x_{12}} = -0{,}0000516268x_{12} + 1{,}701582276.$

Langkah 4, mengevaluasi hasil turunan parsial dengan mendefinisikan $x_{nb} = 0$ maka didapat

$\frac{\partial Z}{\partial u_4} = 0;$
$\frac{\partial Z}{\partial x_7} = 1{,}346725654 > 0;$
$\frac{\partial Z}{\partial x_8} = 4{,}965314536 > 0;$
$\frac{\partial Z}{\partial x_{12}} = 1{,}701582276 > 0.$

Karena nilai evaluasi pada turunan parsial terhadap variabel non basis masih terdapat nilai > 0, solusi belum optimal, maka proses dilanjutkan kembali ke Langkah 5 yaitu melakukan iterasi kedua untuk memperoleh solusi optimal dengan menentukan variabel masuk dan variabel keluar. Pada iterasi ke-4, diperoleh solusi optimal karena semua nilai evaluasi pada hasil turunan parsial terhadap variabel non basis sudah bernilai ≤ 0. Dengan demikian, didapat nilai $x_4 = 17.799{,}53424, x_7 = 16.364{,}01436, x_8 = 6.105{,}685658$, dan $x_{12} = 32.959{,}28231$ (dilihat dari konstanta pada variabel basis di Langkah 3)

Selanjutnya substitusikan x_1, x_2, x_3, x_4 ke dalam fungsi tujuan awal Persamaan (4), menjadi:

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \max Z = {} & (-0{,}000384458(17.799{,}53424)^2 + 13{,}68634667(17.799{,}53424) - 84.681{,}8819) \\ & + (-0{,}000041149(16.364{,}01436)^2 + 1{,}346725654(16.364{,}01436) \\ & + 18.198{,}95388) \\ & + (-0{,}000406614(6.105{,}685658)^2 + 4{,}965314536(6.105{,}685658) \\ & + 15.388{,}75016) + (-0{,}0000258134(32.959{,}28231)^2 \\ & + 1{,}701582276(32.959{,}28231) + 2.752{,}89223);\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow max\ Z = 37.123{,}41619 + 29.217{,}87285 + 30.547{,}07503 + 30.794{,}35753;$

$\Leftrightarrow max\ Z = 127.682{,}7216.$

Jadi, diperoleh rata-rata produksi padi pada empat kabupaten/kota di Kalimantan Barat dengan menggunakan metode Beale sebesar 127.682,7216 Ons/ha atau sama dengan 127,6827216 kw/ha.

Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian diperoleh bahwa dari 12 Kabupaten dan 2 Kota yang ada di Kalimantan Barat hanya 4 Kabupaten yang dapat ditentukan luas panen optimal yaitu Kabupaten Mempawah, Sintang, Kapuas Hulu, dan Kubu Raya. Untuk kabupaten dan kota lainnya tidak dapat ditentukan luas panen optimal karena fungsi kuadratik yang dianalisis bukan merupakan fungsi konkaf. Akibatnya kabupaten dan kota tersebut harus dieliminasi dari permasalahan. Dengan demikian, dari analisis diperoleh rata-rata produksi padi maksimum pada 4 Kabupaten di Kalimantan Barat yaitu sebesar 127.682,7216 Ons/ha atau 127,6827216 kw/ha. Dengan rincian yaitu luas panen Kabupaten Mempawah (x_4) adalah 17.799,53424 ha. Untuk luas panen Kabupaten Sintang (x_7) adalah 16.364,01436 ha. Untuk luas panen Kabupaten Kapuas Hulu (x_8) adalah 6.105,685658 ha. dan untuk luas panen Kabupaten Kubu Raya (x_{12}) adalah 32.959,28231 ha.

Pada penelitian ini beberapa kendala seperti cuaca, pupuk, jenis padi dan teknologi pertanian diabaikan. Untuk penelitian berikutnya, kendala-kendala tersebut dapat dipertimbangkan sehingga solusi optimum yang mendekati kondisi sebenarnya dapat diperoleh. Selain itu, seiring perkembangan zaman banyak terjadi alih fungsi lahan dari pertanian ke industri atau pertokoan. Oleh karena itu analisis sensitivitas terhadap batasan fungsi kendala luas tanam juga menarik untuk diteliti lebih lanjut.

Referensi

[1] Irnanda, K. F., Windarto, A. P., & Damanik, I. S. (2022). Optimasi *Particle Swam Optimization* Pada Peningkatan Prediksi dengan Metode *Backpropagation* Menggunakan Software RapidMiner. *Jurnal Riset Komputer (JURIKOM), 9(1),* 122-130.

[2] Gunantara, Nyoman. (2018). A review of multi-objective optimization: Methods and its applications. *Cogent Engineering, 5(1),* 1-16.

[3] Purba, S. D., Ahyaningsih, F. (2020). Integer Programming dengan Metode Branch and Bound dalam Optimasi Jumlah Produksi Setiap Jenis Roti Pada PT. Arma Anugrah Abadi. *KARISMATIKA 6(3)*, 20-29.

[4] Tulzahrah, S., Syaripuddin, & Asmaidi. (2023). Application of Quadratic Programming Using the Beale Method. *Jurnal Inovasi Teknologi dan Rekayasa, 8(2),* 265-271.

[5] Hillier, F., & Lieberman, G. (2001). *Introduction to Operations Research (Seventh Edition).* New York: McGraw-Hill Higher Education.

[6] Sitanggang, R. P., Sinaga, L. P. (2023). Analisis Optimisasi Program Kuadratik dengan Fungsi Penalty. *Jurnal Riset Rumpun Ilmu Pendidikan (JURRIPEN), 2(1),* 32-42.

[7] Insani, S. N., Sari, E. R. (2017). Optimasi Tanaman Pangan Di Kota Magelang dengan Pemrograman Kuadratik dan Metode Fungsi Penalti Eksterior. *Jurnal Matematika, 6(2*), 40-51.

[8] Patel, S. (2014). *Some Aspects of Non-Linear Optimization* (Thesis). Rourkela: Department of Mathematics Nit Rourkela.

[9] Basriati, S., Safitri, E., & Ulfa, N. (2020). Optimasi Rata-Rata Produksi Kelapa di Kabupaten Indragiri Hilir Menggunakan Metode Wolfe. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika, 6*(1), 90-97.

[10] Erlina, Syaripuddin, & Amijaya, F. D. (2022). Penyelesaian Masalah Pemrograman Kuadratik Menggunakan Metode Beale. *Jurnal Eksponensial, 13*(1), 87-93.

[11] Mariappan, P. (2013). *Operation Research an Introduction*. India: Pearson Education.

[12] Sharma, J. K. (2016). *Operations Research Theory and Applications. Sixth Edition.* India: Trinity Press.

[13] Patti, P., Kaya, E., & Silahooy, C. (2013). Analisis Status Nitrogen Tanah dalam Kaitannya dengan Serapan N oleh Tanaman Padi Sawah di Desa Waimital. *Agrologia*, 51-58.

[14] Masganti, Susilawati, A., & Yuliani, N. (2020). Optimasi Pemanfaatan Lahan untuk Peningkatan Produksi Padi di Kalimantan Selatan. *Jurnal Sumberdaya Lahan, 14(2),* 101-114.

[15] H.S., Mamat, Sukarman. (2020). Manfaat Inovasi Teknologi Sumberdaya Lahan Pertanian dalam Mendukung Pembangunan Pertanian. *Jurnal Sumberdaya Lahan, 14(2),* 115-131.

[16] Parhusip, Hanna Arini. (2019). Pembelajaran Pemodelan Realistik dengan Fungsi Kuadratik Dua Variabel. *SJME (Supremum Journal of Mathematics Education), 3(2),* 108-116.

[17] Mirmohseni, S. M., Nasseri, S. H. (2017). A Quadratic Programming with Triangular Fuzzy Number. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 5, 2218-2227.