Pelabelan Fibonacci Prima ke-*k* pada Graf H dan Graf Ulat H_n

Nyemas Yupika Sari[1, a)], Evi Noviani[1, b)] dan Fransiskus Fran[1, c)]

[1]*Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Tanjungpura Pontianak, Indonesia*

[a)]*email: nyemasyupi001@student.untan.ac.id*
[b)] *email: evi_noviani@math.untan.ac.id*
[c)] *email: fransiskusfran@math.untan.ac.id*

Abstrak

Artikel ini membahas tentang pelabelan Fibonacci prima ke-*k* pada sebuah graf sederhana G dengan himpunan simpul $\mathrm{V(G)}$ dan himpunan sisi $\mathrm{E(G)}$. Suatu graf G adalah graf Fibonacci prima ke-*k* jika terdapat pemetaan injektif $\mathrm{f: V(G)} \rightarrow \{\mathrm{F_k}, \mathrm{F_{k+1}}, \dots, \mathrm{F_{k+n-1}}\}$ yang memetakan himpunan simpul $V(G)$ ke himpunan bagian bilangan Fibonacci $\{\mathrm{F_k}, \mathrm{F_{k+1}}, \dots, \mathrm{F_{k+n-1}}\}$. F_k merupakan bilangan Fibonacci yang berada pada urutan ke-*k* di mana $k \leq n$ dan $k, n \in \mathbb{N}$. Untuk setiap sisi $\mathrm{uv} \in \mathrm{E(G)}$ dengan $\mathrm{u, v} \in \mathrm{V(G)}$ berlaku $\mathrm{f^*(uv)} = \mathrm{gcd}\big(\mathrm{f(u), f(v)}\big) = 1$ dengan $f^*: E(G) \rightarrow \mathbb{N}$. Graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf H dengan orde lebih besar atau sama dengan tiga dan graf ulat H_n dengan orde lebih besar atau sama dengan dua. Penelitian ini bertujuan untuk mengkonstruksi pelabelan Fibonacci prima ke-*k* pada graf H dan graf ulat $\mathrm{H_n}$ serta membuktikan bahwa graf tersebut adalah graf Fibonacci prima ke-k.

Kata kunci: bilangan Fibonacci, faktor persekutuan terbesar, graf prima Fibonacci ke-k

Abstract

The content of this article is $\mathrm{k^{th}}$ Fibonacci prime labeling on a simple graph G with vertex set $V(G)$ and edge set $E(G)$. A graph G is a $\mathrm{k^{th}}$ Fibonacci prime graph if there exists an injective mapping $f: V(G) \rightarrow \{F_k, F_{k+1}, \dots, F_{k+n-1}\}$ that maps the set of vertices $V(G)$ to th subset of Fibonacci numbers $\{F_k, F_{k+1}, \dots, F_{k+n-1}\}$. F_k is the Fibonacci number of the $\mathrm{k^{th}}$ order where $k \leq n$ and $k, n \in \mathbb{N}$. For every edge $uv \in E(G)$ with $u, v \in V(G)$ holds $f^*(uv) = gcd(f(u), f(v)) = 1$ with $f^*: E(G) \rightarrow \mathbb{N}$. The graphs used in this study are H graph with order greater than or equal to three and H_n caterpillar graph with order greater than or equal to two.This study aims to contruct the k^{th} Fibonacci prime labeling on H graph and H_n caterpillar graph and prove that the graphs are the k^{th} Fibonacci prime graph.

Keywords: Fibonacci number, greatest common divisor, k^th^ Fibonacci prime graph

Pendahuluan

Teori graf merupakan cabang kajian dari matematika diskrit yang secara spesifik mempelajari tentang graf. Menurut Munir [1], sebuah graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan simpul dan sisi, yang ditulis dengan notasi $G = (V, E)$. Terdapat beberapa topik khusus dalam teori graf, salah satunya adalah pelabelan graf. Sejarah pelabelan graf berasal dari metode yang diperkenalkan oleh A. Rosa pada tahun 1967 atau Graham dan Sloane pada tahun 1980. Rosa menyebut fungsi f sebagai label β dari graf G dengan q sisi, dimana f adalah injeksi simpul G ke dalam himpunan $\{0, 1, \dots, q\}$, jadi misalkan semua sisi xy diberi label $|f(x) - f(y)|$ maka label-label sisi yang dihasilkan berbeda [2]. Pelabelan graf merupakan suatu pemetaan yang menghubungkan elemen-elemen graf ke suatu bilanganClick or tap here to enter text.. Jika labelnya diberikan pada simpul saja, maka pelabelannya disebut pelabelan simpul. Jika labelnya diberikan pada sisi saja, maka pelabelannya disebut pelabelan sisi. Jika labelnya diberikan pada simpul dan sisi maka pelabelannya disebut pelabelan total [3]. Salah satu jenis pelabelan graf adalah pelabelan prima. Konsep pelabelan prima pada graf dimulai oleh Roger Entringer dan diperkenalkan oleh Tout dkk [2]. Sebuah graf dengan himpunan simpul V dikatakan memiliki label prima jika simpul-simpulnya dilabeli dengan $1,2,\dots,|V|$ yang berbeda dan untuk setiap sisi xy, label yang diberikan kepada x dan y adalah bilangan relatif prima. Pelabelan prima telah banyak diteliti pada berbagai jenis graf salah satunya dikaji oleh Ashokkumar dan Margathavalli yang membahas tentang pelabelan prima dari beberapa kelas graf tertentu seperti graf bunga Fl_n, splitting graph of star $K_{1,n}$, graf bistar $B_{n,n}$, graf persahabatan F_n, dan graf $SF(n,1)[4]$. Penelitian lain tentang pelabelan prima telah dilakukan oleh Putra dkk pada graf simpul semi total dari graf sikat dan telah membuktikan bahwa graf-graf tersebut adalah graf prima [5]. Lebih lanjut, Fran dkk telah berhasil membuktikan bahwa *line and splitting graph of brush graph* adalah graf prima [6].

Pada tahun 2011 Vaidya dan Prajapati [7] memperkenalkan konsep pelabelan k-prima. Dalam pelabelan ini, sebuah graf dengan himpunan simpul V dikatakan memiliki label prima jika simpul-simpulnya dilabeli dengan $k, k+1,\dots, k+|V|-1$ yang berbeda dengan k adalah bilangan asli dan untuk setiap sisi xy, label yang diberikan kepada simpul x dan y adalah bilangan relatif prima. Pada penelitiannya telah dibuktikan bahwa setiap graf lintasan P_m, $m \geq 1$ adalah graf k-prima untuk $k \in \mathbb{N}$. Pada [8] dan [9], Arockiamary dan Vijayalakshmi membuktikan bahwa graf *cycle* C_n, graf kecebong $T_{n,m}$, graf persahabatan F_n, *barycentric subdivision of cycle graphs* $C_n(C_n)$, Y-*tree* P_n^3 , X-*tree* P_n^4, dan gabungan satu titik dari graf lintasan P_t^n adalah graf k-prima.

Pelabelan Fibonacci prima adalah sebuah konsep yang menggabungkan pelabelan prima dengan barisan bilangan Fibonacci. Barisan Fibonacci adalah barisan yang setiap angkanya merupakan penjumlahan dari dua angka sebelumnya. Barisan Fibonacci terdiri dari 1,1,2,3,5,8, ..., dst. Bilangan yang merupakan bagian dari barisan Fibonacci disebut bilangan Fibonacci, umumnya dilambangkan dengan F_n [10]. Konsep pelabelan Fibonacci prima pertama kali diperkenalkan oleh Sekar dan Chandrakala [11]. Pada pelabelan ini mengikuti aturan bahwa setiap simpul pada graf dilabeli dengan sebuah bilangan Fibonacci, label tersebut haruslah unik di antara simpul-simpul yang terhubung dengan pembagi persekutuan terbesar sama dengan 1. Faktor persekutuan terbesar atau dalam penelitian ini disebutkan sebagai *gcd* (*greatest common* divisor) adalah bilangan bulat terbesar yang dapat membagi dua bilangan atau lebih. Faktor persekutuan terbesar dapat dicari menggunakan algoritma pembagian. Algoritma pembagian adalah langkah sistematis yang dilakukan pada proses pembagian sehingga diperoleh hasil pembagian dan sisa pembagian. Secara matematis, algoritma pembagian berbunyi jika a, b adalah dua bilangan bulat dan $a > 0$ maka ada bilangan bulat q dan r yang masing-masing tunggal sehingga $b = qa + r$ dengan $0 \leq r < a$ [12]. Lebih lanjut, penelitian tentang pelabelan Fibonacci prima telah dilakukan oleh Chandrakala dan Sekar [13]. Dalam penelitiannya, berhasil membuktikan bahwa beberapa jenis graf terhubung cycle merupakan graf Fibonacci prima. Sebuah penemuan baru oleh Periasamy dan Venugopal [14] yang memperkenalkan konsep pelabelan Fibonacci prima ke-*k*. Dalam pelabelan ini, setiap simpul dalam graf diberi label bilangan Fibonacci $F_k, F_{k+1}, \dots, F_{k+n-1}$ yang berbeda. Fungsi pelabelan ini harus memenuhi persyaratan bahwa untuk setiap sisi uv dalam graf, $\gcd\big(f(u), f(v)\big) = 1$, yang berarti bahwa label simpul

u dan v harus relatif prima. Pada [15], Periasamy dan Venugopal membuktikan bahwa graf dari gabungan siklus C_n dan C_m dengan lintasan P_5 dan gabungan siklus C_n dan C_m dengan segitiga T_s adalah merupakan graf Fibonacci prima ke-*k*. Pelabelan Fibonacci prima ke-*k* pada lintasan, siklus, $Pn \odot K1$, *triangular snake graph*, *quadrilateral snake graph* dan graf kecebong telah dibahas oleh Periasamy dkk [16]. Berdasarkan hasil penelitian tersebut, ditunjukkan bahwa penelitian tentang pelabelan Fibonacci prima ke-*k* masih tergolong baru dan belum banyak diteliti sehingga menarik untuk dianalisis. Oleh karena itu, artikel ini membahas pelabelan Fibonacci prima ke-*k* pada graf H dan graf ulat H_n.

Metode

Metode yang digunakan dalam menyelesaikan penelitian ini adalah studi kepustakaan yaitu dengan mengumpulkan dan mempelajari literatur-literatur seperti buku, jurnal dan artikel yang berkaitan dengan penelitian ini. Langkah-langkah yang dilakukan adalah mencari dan mempelajari graf yang dapat dilabelkan dengan pelabelan Fibonacci prima ke-*k*. Kemudian menetapkan graf $\boldsymbol{H}$ dan graf ulat $\boldsymbol{H_n}$ sebagai graf khusus yang digunakan pada penelitian ini. Selanjutnya, melabelkan setiap simpul pada graf $\boldsymbol{H}$ dan graf ulat $\boldsymbol{H_n}$ dengan bilangan Fibonacci yang dimulai dari bilangan Fibonacci ke-k atau dilambangkan sebagai $\boldsymbol{F_k}$ dengan memenuhi kondisi $\boldsymbol{f^*(uv) = \gcd(f(u), f(v)) = 1}$. Kemudian hasil pelabelan tersebut membentuk sebuah formula. Formula tersebut dibuktikan dengan konsep matematika. Jika terbukti maka penelitian selesai. Untuk membuktikan formula tersebut digunakan lema dan teorema sebagai berikut.

Lema 1. [10] *Untuk* $\boldsymbol{m, n \geq 1}$ *dengan* $\boldsymbol{m, n} \in \mathbb{N}$*,* $\boldsymbol{F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n}$.

Lema 2. [10] *Untuk* $\boldsymbol{n \geq 1, n} \in \mathbb{N}$*,* $\boldsymbol{gcd(F_n, F_{n+1}) = 1}$.

Lema 3. [10] *Diberikan* $\boldsymbol{m, n \geq 1}$ *dengan* $\boldsymbol{m > n}$ *dan* $\boldsymbol{m, n} \in \mathbb{N}$*. Misalkan* $\boldsymbol{m = qn + r}$*, dengan* $\boldsymbol{q \geq 0}$ *dan* $\boldsymbol{0 \leq r \leq n}$*, maka* $\boldsymbol{gcd(F_m, F_n) = gcd(F_r, F_n)}$.

Teorema 1. [10] *Diberikan* $m, n \geq 0, m, n \in \mathbb{Z}$*, maka* $gcd(F_m, F_n) = F_{gcd(m,n)}$.

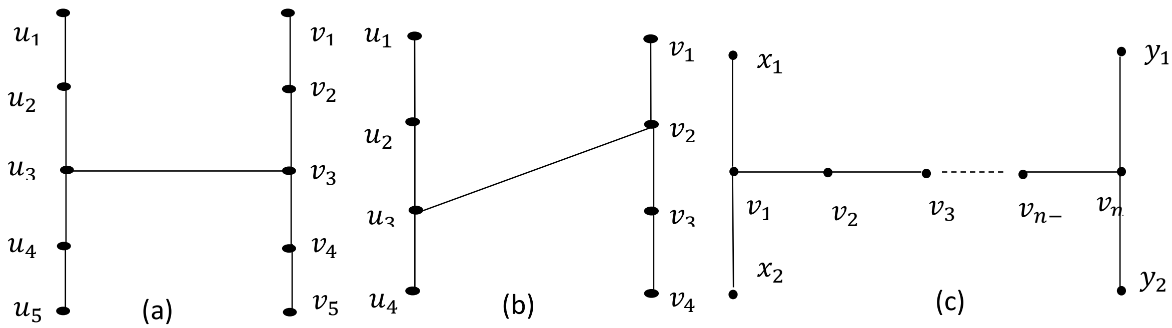
Hasil dan Diskusi

Pada bagian ini dibahas tentang konstruksi pola pelabelan Fibonacci prima ke-*k* pada graf H dan graf ulat H_n. Sebelum memasuki pembahasan, terlebih dahulu diberikan definisi-definisi yang berguna untuk penelitian ini.

Definisi 1. [17] *Graf* H *adalah graf yang dibentuk dari dua buah lintasan* $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ *dan* $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ *yang dihubungkan dengan sisi* $u_{\frac{n+1}{2}} v_{\frac{n+1}{2}}$ *jika* n *ganjil dan sisi* $u_{\frac{n+2}{2}} v_{\frac{n}{2}}$ *jika* n *genap*.

Definisi 2. [2] *Graf ulat merupakan pohon yang jika semua simpul berderajat satu (simpul ujung) dihilangkan maka akan membentuk lintasan*.

Graf ulat mempunyai berbagai bentuk salah satunya adalah graf ulat bentuk H atau disebut dengan graf ulat H_n[18], [19]. Sehingga graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf ulat H_n. Berikut diberikan contoh gambar graf H dan gambar graf ulat H_n.



Gambar 1. (a) Graf H untuk $n = 5$, (b) Graf H untuk $n = 4$, dan (c) Graf ulat H_n

Definisi 3. [16] *Pelabelan Fibonacci prima ke-k dari graf* $G = (V, E)$ *dengan* $|V(G)| = n$ *adalah fungsi injektif* $f: V(G) \to \{F_k, F_{k+1}, \dots, F_{k+n-1}\}$, *dimana* F_k *merupakan bilangan Fibonacci ke-k yang menginduksi fungsi* $f^*: E(G) \to \mathbb{N}$ *sedemikian sehingga* $f^*(uv) = gcd\{f(u), f(v)\} = 1, \forall uv \in E(G)$. *Graf yang memenuhi pelabelan Fibonacci prima ke-k disebut graf Fibonacci prima ke-k*.

Teorema 2. Graf H dengan $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ merupakan graf Fibonacci prima ke-*k*

Bukti. Diberikan $u_1, u_2, \dots, u_n$ dan $v_1, v_2, \dots, v_n$ adalah simpul-simpul pada graf H.

Didefinisikan $f: V(H) \to \{F_k, F_{k+1}, \dots, F_{k+2n-1}\}$ sebagai berikut.

a. $f(u_i) = F_{k+2i-2}$, dengan $1 \leq i \leq n$
b. $f(v_i) = F_{k+2i-1}$, dengan $1 \leq i \leq n$

Akan dibuktikan bahwa graf H adalah graf Fibonacci prima ke-*k* dengan memenuhi **Definisi 3**.

1. Akan ditunjukkan bahwa fungsi f injektif. Diketahui $V(H) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \cup \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ sehingga $|V(H)| = 2n$. Lebih lanjut, $f\big(V(H)\big) = \{f(u_i)|1 \leq i < n\} \cup \{f(v_i)|1 \leq i \leq n\}$. sedemikian sehingga $\big|f\big(V(H)\big)\big| = 2n$. Berdasarkan (a) dan (b) diperoleh bahwa label yang berbeda pada setiap simpul dan $f\big(V(H)\big) \subseteq \{F_k, F_{k+1}, \dots, F_{k+2n-1}\}$ maka fungsi f injektif.
2. Akan ditunjukkan,

$f^*(u_iu_{i+1}) = \gcd\big(f(u_i), f(u_{i+1})\big) = 1$,

$f^*(v_iv_{i+1}) = \gcd\big(f(v_i), f(v_{i+1})\big) = 1$,

$f^*(u_iv_i) = \gcd\big(f(u_i), f(v_i)\big) = 1$ untuk n ganjil,

$f^*(u_{i+1}v_i) = \gcd\big(f(u_{i+1}), f(v_i)\big) = 1$ untuk n genap.

a. Untuk sisi u_iu_{i+1}

Akan ditunjukkan bahwa $f^*(u_iu_{i+1}) = \gcd\big(f(u_i), f(u_{i+1})\big) = \gcd(F_{k+2i-2}, F_{k+2i}) = 1$

Diketahui $k + 2i > k + 2i - 2$ berdasarkan algoritma pembagian maka,

$$k + 2i = (k + 2i - 2).1 + 2.$$

Menggunakan **Lema 1** maka dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\begin{aligned}\gcd(F_{k+2i-2}, F_{k+2i}) &= \gcd\big(F_{k+2i-2}, F_{(k+2i-2).1+2}\big)\\ &= \gcd(F_{k+2i-2}, F_{k+2i-2}F_3 + F_{k+2i-3}F_2)\end{aligned}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan Lema 3 diperoleh

$$\gcd(F_{k+2i-2}, F_{k+2i-2}F_3 + F_{k+2i-3}F_2) = \gcd(F_{k+2i-2}, F_2).$$

Untuk mendapatkan *gcd* dari F_{k+2i-2} dan F_2 maka dicari terlebih dahulu *gcd* dari indeks kedua bilangan Fibonacci tersebut yaitu $(k + 2i - 2)$ dan 2. Karena 2 adalah bilangan prima yang tidak memiliki faktor selain 1 dan dirinya sendiri maka terdapat dua kemungkinan, yaitu

1) $\gcd\big((k+2i-2),2\big)=2$, jika $(k+2i-2)$ merupakan bilangan genap
2) $\gcd\big((k+2i-2),2\big)=1$, jika $(k+2i-2)$ merupakan bilangan ganjil dengan $k\geq 2, i\geq 1$, $k,i\in\mathbb{N}$.

Akibatnya, berdasarkan **Teorema 1** diperoleh $\gcd(F_{k+2i-2},F_2)=F_{\gcd(k+2i-2,2)}=F_1=1$ atau $\gcd(F_{k+2i-2},F_2)=F_{\gcd(k+2i-2,2)}=F_2=1$. Dapat disimpulkan $\gcd(F_{k+2i-2},F_2)=1$. Jadi, terbukti bahwa $f^*(u_iu_{i+1})=\gcd\big(f(u_i),f(u_{i+1})\big)=\gcd(F_{k+2i-2},F_{k+2i})=1$.

b. Untuk sisi v_iv_{i+1}

Akan ditunjukkan bahwa $f^*(v_iv_{i+1})=\gcd\big(f(v_i),f(v_{i+1})\big)=\gcd(F_{k+2i-1},F_{k+2i+1})=1$.

Diketahui $k+2i+1>k+2i-1$ berdasarkan algoritma pembagian maka, $k+2i+1=(k+2i-1).1+2$.Menggunakan **Lema 1** dapat dituliskan

$$\begin{aligned}\gcd(F_{k+2i-1},F_{k+2i+1})&=\gcd\big(F_{k+2i-1},F_{(k+2i-1).1+2}\big)\\&=\gcd(F_{k+2i-1},F_{k+2i-1}F_3+F_{k+2i-2}F_2)\end{aligned}$$

Selanjutnya, menggunakan **Lema 3** diperoleh $\gcd(F_{k+2i-1},F_{k+2i-1}F_3+F_{k+2i-2}F_2)=\gcd(F_{k+2i-1},F_2)$. Untuk mendapatkan *gcd* dari F_{k+2i-1} dan F_2 maka dicari terlebih dahulu gcd dari $(k+2i-1)$ dan 2. Karena 2 adalah bilangan prima yang tidak memiliki faktor selain 1 dan dirinya sendiri maka terdapat dua kemungkinan, untuk $k,i\in\mathbb{N}$ yaitu

1) $\gcd\big((k+2i-1),2\big)=2$, jika $(k+2i-1)$ merupakan bilangan genap,
2) $\gcd\big((k+2i-1),2\big)=1$, jika $(k+2i-1)$ merupakan bilangan ganjil dengan $k\geq 2, i\geq 1$.

Akibatnya, berdasarkan **Teorema 1** diperoleh $\gcd(F_{k+2i-1},F_2)=F_{\gcd(k+2i-1,2)}=F_1=1$ atau $\gcd(F_{k+2i-1},F_2)=F_{\gcd(k+2i-1,2)}=F_2=1$. Dapat disimpulkan $\gcd(F_{k+2i-1},F_2)=1$. Jadi, terbukti bahwa $f^*(v_iv_{i+1})=\gcd\big(f(v_i),f(v_{i+1})\big)=\gcd(F_{k+2i-1},F_{k+2i+1})=1$.

c. Untuk sisi u_iv_i jika n ganjil

Akan ditunjukkan bahwa $f^*(u_iv_i)=\gcd\big(f(u_i),f(v_i)\big)=\gcd(F_{k+2i-2},F_{k+2i-1})=1$.

Misalkan $P(i,k)$: $\gcd(F_{k+2i-2},F_{k+2i-1})=1$. Menggunakan induksi matematika, akan dibuktikan bahwa $P(i,k)$ benar.

i) Basis induksi: Misalkan ditetapkan untuk setiap $k\in\mathbb{N}$ maka $P(i,k)$ berlaku. Akan dibuktikan dengan induksi untuk $i=1$ maka $P(1,k)$ benar sehingga diperoleh,

$$P(1,k)\colon \gcd(F_{k+2i-2},F_{k+2i-1})=\gcd(F_k,F_{k+1})=1$$

Karena F_k dan F_{k+1} adalah bilangan Fibonacci berurut, berdasarkan **Lema 2** maka $P(1,k)$ benar.

ii) Langkah induksi: Diasumsikan $i=a$ benar untuk $a=1,2,3,\dots,i$ dengan $a,i\in\mathbb{N}$ maka $P(a,k)$: $\gcd(F_{k+2a-2},F_{k+2a-1})=1$

Akan ditunjukkan kebenaran implikasi jika $P(a,k)$ benar maka $P(a+1,k)$ juga benar sedemikian sehingga,

$$\begin{aligned}P(a+1,k)\colon \gcd\big(F_{k+2(a+1)-2},F_{k+2(a+1)-1}\big)&=\gcd(F_{k+2a},F_{k+2a+1})\\&=\gcd(F_{k+2a},F_{k+2a}+F_{k+2a-1})\\&=\gcd(F_{k+2a},F_{k+2a-1})\\&=\gcd(F_{k+2a-2}+F_{k+2a-1},F_{k+2a-1})\\&=\gcd(F_{k+2a-2},F_{k+2a-1})\end{aligned}$$

Berdasarkan asumsi maka, $\gcd\left(F_{k+2(a+1)-2}, F_{k+2(a+1)-1}\right) = \gcd(F_{k+2a-2}, F_{k+2a-1}) = 1$ benar. Karena langkah (i) dan (ii) benar maka $P(i,k)$ benar sehingga terbukti bahwa $f^*(u_i v_i) = \gcd\left(f(u_i), f(v_i)\right) = \gcd(F_{k+2i-2}, F_{k+2i-1}) = 1$.

d. Untuk sisi $u_{i+1}v_i$ jika n genap

Akan ditunjukkan bahwa $f^*(u_{i+1}v_i) = \gcd\left(f(u_{i+1}), f(v_i)\right) = \gcd(F_{k+2i}, F_{k+2i-1}) = 1$

Misalkan $P(i,k)$: $\gcd(F_{k+2i}, F_{k+2i-1}) = 1$. Menggunakan induksi matematika akan dibuktikan bahwa $P(i,k)$ benar.

i) Basis induksi: Misalkan ditetapkan untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ maka $P(i,k)$ berlaku. Akan dibuktikan dengan induksi untuk $i = 1$ maka $P(1,k)$ benar sehingga diperoleh,

$$P(1,k)\colon \gcd(F_{k+2}, F_{k+1}) = 1$$

Karena F_{k+2} dan F_{k+1} adalah bilangan Fibonacci berurut, berdasarkan **Lema 2** maka $P(1,k)$ benar.

ii) Langkah induksi: Diasumsikan $i = a$ benar untuk $a = 1,2,3,\dots,i$ dengan $a, i \in \mathbb{N}$ maka,

$$P(a,k)\colon \gcd(F_{k+2a}, F_{k+2a-1}) = 1$$

Akan ditunjukkan kebenaran implikasi jika $P(a,k)$ benar maka $P(a+1,k)$ juga benar sedemikian sehingga,

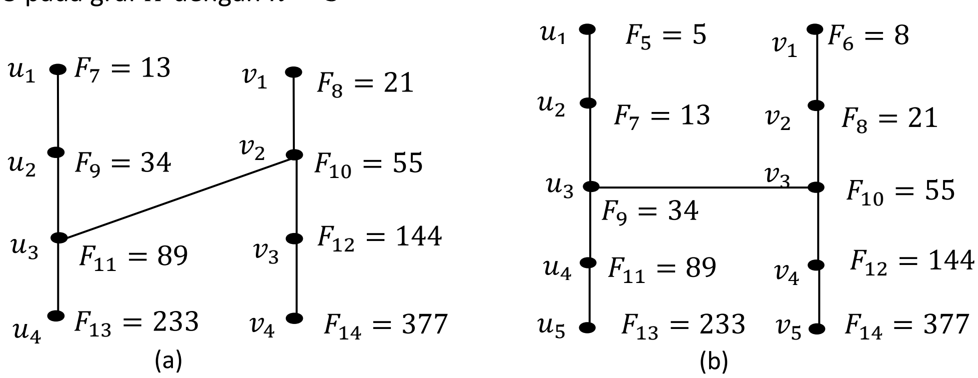
$$\begin{aligned} P(a+1,k)\colon \gcd\left(F_{k+2(a+1)}, F_{k+2(a+1)-1}\right) &= \gcd(F_{k+2a+2}, F_{k+2a+1}) \\ &= \gcd(F_{k+2a} + F_{k+2a+1}, F_{k+2a+1}) \\ &= \gcd(F_{k+2a}, F_{k+2a+1}) \\ &= \gcd(F_{k+2a}, F_{k+2a} + F_{k+2a-1}) \\ &= \gcd(F_{k+2a}, F_{k+2a-1}) \end{aligned}$$

Berdasarkan asumsi maka, $\gcd\left(F_{k+2(a+1)}, F_{k+2(a+1)-1}\right) = \gcd(F_{k+2a}, F_{k+2a-1}) = 1$ benar.

Karena langkah (i) dan (ii) benar maka $P(i,k)$ benar sehingga terbukti bahwa $f^*(u_{i+1}v_i) = \gcd\left(f(u_{i+1}), f(v_i)\right) = \gcd(F_{k+2i}, F_{k+2i-1}) = 1$.

Diperoleh bahwa graf H memenuhi **Definisi 3** sehingga terbukti bahwa graf H merupakan graf Fibonacci prima ke-k■.

Berikut contoh pelabelan Fibonacci prima ke-7 pada graf H dengan $n = 4$ dan pelabelan Fibonacci prima ke-5 pada graf H dengan $n = 5$



Gambar 3. (a) Graf Fibonacci prima ke-7, (b) Graf Fibonacci prima ke-5

Teorema 3. Graf ulat H_n dengan $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ merupakan graf Fibonacci prima ke-*k.*

Bukti. Diberikan himpunan simpul dan sisi dari graf H_n sebagai berikut.

$V(H_n) = \{x_1, x_2, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n, y_1, y_2\}$ dan

$E(H_n) = \{x_1v_1, x_2v_1, v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, y_1v_n, y_2v_n\}$, dengan $n \in \mathbb{N}$

Didefinisikan $f: V(H_n) \to \{F_k, F_{k+1}, \dots, F_{k+n+3}\}$ sebagai berikut.

a. $f(x_1) = F_k$

b. $f(x_2) = F_{k+1}$

c. $f(v_i) = F_{k+i+1}$, dengan $i \leq 1 \leq n$

d. $f(y_1) = F_{k+n+2}$

e. $f(y_2) = F_{k+n+3}$, dengan $n \geq 2$

Akan dibuktikan bahwa graf ulat H_n merupakan graf Fibonacci prima ke-*k* dengan memenuhi **Definisi 3**.

1. Akan ditunjukkan bahwa $f: V(H_n) \to \{F_k, F_{k+1}, \dots, F_{k+n+3}\}$ merupakan fungsi injektif. Diketahui $V(H_n) = \{x_1, x_2, y_1, y_2\} \cup \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ sehingga $|V(H_n)| = n + 4$. Lebih lanjut, $f(V(H_n)) = \{f(x_1), f(x_2), f(y_1), f(y_2)\} \cup \{f(v_i) | 1 \leq i \leq n\}$ sedemikian sehingga $|f(V(H_n))| = n + 4$. Berdasarkan (a), (b), (c), (d) dan (e), diperoleh label yang berbeda pada setiap simpul dalam graf ulat H_n dan $f(V(H_n)) \subseteq \{F_k, F_{k+1}, \dots, F_{k+n+3}\}$ maka fungsi f injektif.
2. Akan ditunjukkan,

   $f^*(x_1v_1) = \gcd(f(x_1), f(v_1)) = 1$,

   $f^*(x_2v_1) = \gcd(f(x_2), f(v_1)) = 1$,

   $f^*(v_{i-1}v_i) = \gcd(f(v_{i-1}), f(v_i)) = 1$, untuk $2 \leq i \leq n$

   $f^*(y_1v_n) = \gcd(f(y_1), f(v_n)) = 1$,

   $f^*(y_2v_n) = \gcd(f(y_2), f(v_n)) = 1$.

   a. Untuk sisi x_1v_1

   Akan ditunjukkan bahwa $f^*(x_1v_1) = \gcd(f(x_1), f(v_1)) = \gcd(F_k, F_{k+2}) = 1$.

   Diketahui $k + 2 > k$ berdasarkan algoritma pembagian maka $k + 2 = k \cdot 1 + 2$. Berdasarkan **Lema 2** dapat dituliskan $\gcd(F_k, F_{k+2}) = \gcd(F_k, F_{k\cdot 1+2}) = \gcd(F_k, F_kF_3 + F_{k-1}F_2)$

   Selanjutnya, menurut **Lema 3** diperoleh $\gcd(F_k, F_kF_3 + F_{k-1}F_2) = \gcd(F_k, F_{k-1}F_2) = \gcd(F_k, F_2)$. Untuk menemukan *gcd* dari F_k dan F_2 maka dicari terlebih dahulu *gcd* dari k dan 2. Karena 2 adalah bilangan prima yang memiliki faktor 1 dan dirinya sendiri maka,

   1) $\gcd(k, 2) = 1$, jika k adalah bilangan ganjil,
   2) $\gcd(k, 2) = 2$, jika k adalah bilangan genap dengan $k \geq 2, k \in \mathbb{N}$.

   Akibatnya, menurut **Teorema 1** diperoleh $\gcd(F_k, F_{k+2}) = \gcd(F_k, F_2) = F_{\gcd(k,2)} = F_1 = 1$ atau $\gcd(F_k, F_{k+2}) = \gcd(F_k, F_2) = F_{\gcd(k,2)} = F_2 = 1$. Dapat disimpulkan $\gcd(F_k, F_{k+2}) = 1$. Jadi, terbukti bahwa $f^*(x_1v_1) = \gcd(f(x_1), f(v_1)) = \gcd(F_k, F_{k+2}) = 1$.

   b. Untuk sisi x_2v_1

   Akan ditunjukkan bahwa $f^*(x_2v_1) = \gcd(f(x_2), f(v_1)) = \gcd(F_{k+1}, F_{k+2}) = 1$

   Misalkan $P(k)$: $\gcd(F_{k+1}, F_{k+2}) = 1$. Menggunakan induksi matematika, akan dibuktikan bahwa $P(k)$ benar.

   i) Basis induksi: Akan dibuktikan untuk $k = 1$ maka $P(1)$ benar sehingga diperoleh,

   $$P(1): \gcd(F_{k+1}, F_{k+2}) = \gcd(F_{1+1}, F_{1+2}) = \gcd(F_2, F_3) = \gcd(1,2) = 1$$

   $P(1)$ benar karena jelas bahwa *gcd* dari 1 dan 2 adalah 1.

   Langkah induksi: Diasumsikan $k = a$ benar untuk $a = 1,2,3, \dots$, dengan $k, a \in \mathbb{N}$ diperoleh,

   $$P(a): \gcd(F_{a+1}, F_{a+2}) = 1$$

ii) Akan ditunjukkan kebenaran implikasi jika $P(a)$ benar maka $P(a+1)$ juga benar sedemikian sehingga,

$$\begin{aligned} P(a+1)\colon \gcd\left(F_{(a+1)+1}, F_{(a+2)+1}\right) &= \gcd(F_{a+2}, F_{a+3}) \\ &= \gcd(F_{a+2}\,, F_{a+2} + F_{a+1}) \\ &= \gcd(F_{a+2}, F_{a+1}) \\ &= \gcd(F_{a+1}, F_{a+2}) = 1 \end{aligned}$$

Berdasarkan asumsi maka $\gcd\left(F_{(a+1)+1}, F_{(a+2)+1}\right) = \gcd(F_{a+1}, F_{a+2}) = 1$ benar.

Karena langkah (i) dan (ii) benar maka $P(k)$ benar sehingga terbukti bahwa $f^*(x_2v_1) = \gcd\left(f(x_2), f(v_1)\right) = \gcd(F_{k+1}, F_{k+2}) = 1$.

c. Untuk sisi $v_{i-1}v_i$, jika $2 \le i \le n$

Akan ditunjukkan bahwa $f^*(v_{i-1}v_i) = \gcd\left(f(v_{i-1}), f(v_i)\right) = \gcd(F_{k+i}, F_{k+i+1}) = 1$

Misalkan $P(i,k)\colon \gcd(F_{k+i}, F_{k+i+1}) = 1$. Menggunakan induksi matematika akan dibuktikan bahwa $P(i,k)$ benar.

i) Basis induksi: Misalkan ditetapkan untuk setiap $i \in \mathbb{N}$ maka $P(i,1)$ berlaku. Akan dibuktikan dengan induksi untuk $k = 1$ maka $P(i,1)$ benar sehingga diperoleh

$$P(i,1)\colon \gcd(F_{k+i}, F_{k+i+1}) = \gcd(F_{i+1}, F_{i+2}) = 1$$

karena F_{i+1} dan F_{i+2} adalah bilangan Fibonacci berurut, berdasarkan **Lema 2** maka $P(i,1)$ benar.

ii) Langkah induksi: Diasumsikan $k = a$ benar untuk $a = 1,2,3,..,k$ dengan $a, k \in \mathbb{N}$ maka,

$$P(i,a)\colon \gcd(F_{a+i}, F_{a+i+1}) = 1$$

Akan ditunjukkan kebenaran implikasi jika $P(i,a)$ benar maka $P(i,a+1)$ juga benar sedemikian sehingga,

$$\begin{aligned} P(i,a+1)\colon \gcd\left(F_{(a+1)+i}, F_{(a+1)+i+1}\right) &= \gcd(F_{a+i+1}, F_{a+i+2}) \\ &= \gcd(F_{a+i+1}, F_{a+i+1} + F_{a+i}) \\ &= \gcd(F_{a+i+1}, F_{a+i}) \\ &= \gcd(F_{a+i}, F_{a+i+1}) \end{aligned}$$

Berdasarkan asumsi maka, $\gcd\left(F_{(a+1)+i}, F_{(a+1)+i+1}\right) = \gcd(F_{a+i}, F_{a+i+1}) = 1$ benar.

Diperoleh langkah (i) dan (ii) benar maka $P(i,k)$ benar sehingga terbukti bahwa

$$f^*(v_{i-1}v_i) = \gcd\left(f(v_{i-1}), f(v_i)\right) = \gcd(F_{k+i}, F_{k+i+1}) = 1$$

d. Untuk sisi y_1v_n

Akan ditunjukkan bahwa $f^*(y_1v_n) = \gcd\left(f(y_1), f(v_n)\right) = \gcd(F_{k+n+2}, F_{k+n+1}) = 1$

Misalkan $P(k,n)\colon f^*(y_1v_n) = \gcd\left(f(y_1), f(v_n)\right) = \gcd(F_{k+n+2}, F_{k+n+1}) = 1$. Menggunakan induksi matematika, akan dibuktikan bahwa $P(k,n)$ benar.

i) Basis induksi: Misalkan ditetapkan untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$ maka $P(k,n)$ berlaku. Akan dibuktikan dengan induksi untuk $k = 1$ maka $P(1,n)$ benar sehingga diperoleh,

$$P(1,n)\colon \gcd(F_{k+n+2}, F_{k+n+1}) = \gcd(F_{n+3}, F_{n+2}) = 1$$

karena F_{n+3} dan F_{n+2} adalah bilangan Fibonacci berurut, berdasarkan **Lema 2** maka $P(1,n)$ benar.

ii) Langkah induksi: Diasumsikan $k = a$ benar untuk $a = 1,2,3,..,k$, dengan $a, k \in \mathbb{N}$ maka,

$$P(a,n)\colon f^*(y_1v_n) = \gcd\left(f(y_1), f(v_i)\right) = \gcd(F_{a+n+2}, F_{a+n+1}) = 1$$

Akan ditunjukkan kebenaran implikasi jika $P(a,n)$ benar maka $P(a+1,n)$ juga benar sedemikian sehingga,

$$\begin{aligned} P(a+1,n)\colon \gcd\left(F_{(a+1)+n+2}, F_{(a+1)+n+1}\right) &= \gcd(F_{a+n+3}, F_{a+n+2}) \\ &= \gcd(F_{a+n+1} + F_{a+n+2}, F_{a+n+2}) \\ &= \gcd(F_{a+n+1}, F_{a+n+2}) \\ &= \gcd(F_{a+n+2}, F_{a+n+1}) \end{aligned}$$

Berdasarkan asumsi maka, $\gcd\left(F_{(a+1)+n+2}, F_{(a+1)+n+1}\right) = \gcd(F_{a+n+1}, F_{a+n+2}) = 1$ benar.

Diperoleh langkah (i) dan (ii) benar maka $P(k,n)$ benar sehingga terbukti bahwa $f^*(y_1v_n) = \gcd\left(f(y_1), f(v_i)\right) = \gcd(F_{k+n+2}, F_{k+n+1}) = 1$.

e. Untuk sisi y_2v_n

Akan ditunjukkan bahwa $f^*(y_1v_n)\colon \gcd\left(f(y_2), f(v_n)\right) = \gcd(F_{k+n+3}, F_{k+n+1}) = 1$.

Diketahui $k+n+3 > k+n+1$. Berdasarkan algoritma pembagian maka $k+n+3 = (k+n+1)\cdot 1 + 2$. Dari **Lema 1** dapat dituliskan

$$\begin{aligned} \gcd(F_{k+n+3}, F_{k+n+1}) &= \gcd\left(F_{(k+n+1).1+2}, F_{k+n+1}\right) \\ &= \gcd(F_{k+n+1}F_3 + F_{k+n}F_2, F_{k+n+1}) \end{aligned}$$

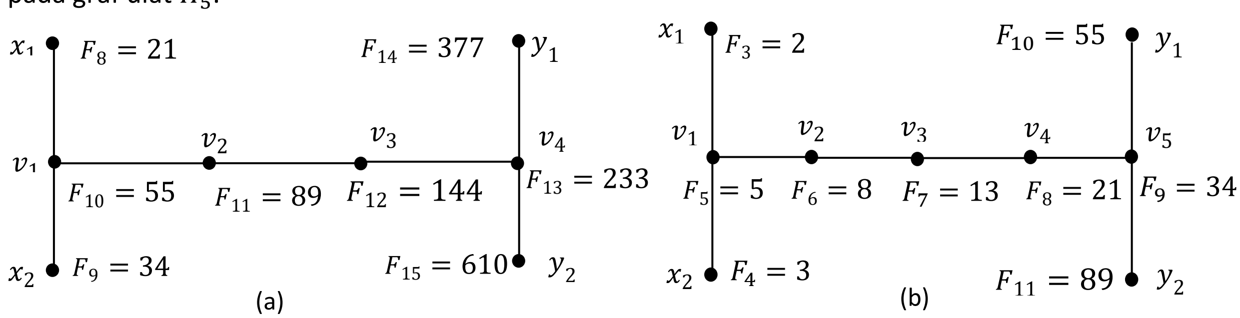
Selanjutnya, menurut **Lema 3** diperoleh

$$\begin{aligned} \gcd(F_{k+n+1}F_3 + F_{k+n}F_2, F_{k+n+1}) &= \gcd(F_{k+n}F_2, F_{k+n+1}) \\ &= \gcd(F_{k+n+1}, F_2) \end{aligned}$$

Untuk menemukan *gcd* dari F_{k+n+1} dan F_2 maka dicari terlebih dahulu *gcd* dari $(k+n+1)$ dan 2. Karena $(k+n+1)$ merupakan pola bilangan ganjil dan 2 adalah bilangan prima yang memiliki faktor 1 dan dirinya sendiri maka dapat disimpulkan *gcd* dari $(k+n+1)$ dan 2 akan bernilai 1 berlaku untuk semua nilai k dan n dengan $k, n \geq 2, k, n \in \mathbb{N}$. Akibatnya, berdasarkan **Teorema 1** maka $\gcd(F_{k+n+1}, F_{k+n+3}) = \gcd(F_{k+n+1}, F_2) = F_{\gcd(k+n+1,2)} = F_1 = 1$. Jadi, terbukti bahwa $f^*(y_1v_b)\colon \gcd\left(f(y_2), f(v_n)\right) = \gcd(F_{k+n+3}, F_{k+n+1}) = 1$.

Diperoleh bahwa graf ulat H_n memenuhi **Definisi 3** maka terbukti bahwa graf ulat H_n adalah graf Fibonacci prima ke-*k*■.

Berikut contoh pelabelan Fibonacci prima ke-8 pada graf ulat H_4 dan pelabelan Fibonacci prima ke-3 pada graf ulat H_5.



Gambar 4. (a) Graf ulat H_4 adalah graf Fibonacci prima ke-8, (b) Graf ulat H_5 adalah graf Fibonacci prima ke-3

Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa graf H dan graf ulat H_n adalah graf Fibonacci prima ke-*k* dengan hasil konstruksi pola pelabelan sebagai berikut.

a. Pola pelabelan Fibonacci prima ke-*k* pada graf H yang didefinisikan dengan fungsi $f: V(H) \rightarrow \{F_k, F_{k+1}, \dots, F_{k+2n-1}\}$ yaitu,
   $f(u_i) = F_{k+2i-2}$
   $f(v_i) = F_{k+2i-1}$ dengan $1 \leq i \leq n$.
b. Pola pelabelan Fibonacci prima ke-*k* pada graf ulat H_n yang didefinisikan dengan fungsi $f: V(H_n) \rightarrow \{F_k, F_{k+1}, \dots, F_{k+n+3}\}$ yaitu,
   $f(x_1) = F_k$
   $f(x_2) = F_{k+1}$
   $f(v_i) = F_{k+i+1}$, dengan $1 \leq i \leq n$
   $f(y_1) = F_{k+n+2}$
   $f(y_2) = F_{k+n+3}$, dengan $n \geq 2$.

Referensi

[1] R. Munir, *Matematika Diskrit*, Bandung: Informatika, 2010.
[2] J. A. Gallian, “A Dynamic Survey of Graph Labeling,” *Electron. J. Comb.*, vol. 1000, p. DS6: Dec 2, Dec. 2022, doi: 10.37236/11668.
[3] F. Fran and D. R. Putra, “Prime Labeling of Pan Graph and Its Line, Middle and Duplication Graph,” vol. 3, 2020.
[4] S. Ashokkumar and S. Maragathavalli, “Prime Labelling Of Some Special Graphs”.
[5] D. R. Putra, M. Kiftiah, and F. Fran, “Pelabelan Prima pada Graf Simpul Semi Total dari Graf Sikat,” *Variabel*, vol. 5, no. 2, p. 117, Oct. 2022, doi: 10.26737/var.v5i2.2699.
[6] F. Fran, D. R. Putra, and M. Pasaribu, “Prime labeling of line and splitting graph of brush graph,” *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 2106, no. 1, p. 012030, Nov. 2021, doi: 10.1088/1742-6596/2106/1/012030.
[7] S. K. Vaidya and U. M. Prajapati, “Some Results on Prime and k-Prime Labeling,” *J. Math. Res.*, vol. 3, no. 1, p. p66, Jan. 2011, doi: 10.5539/jmr.v3n1p66.
[8] S. Teresa Arockiamary and G. Vijayalakshmi, “k-Prime labeling of certain cycle connected graphs,” *Malaya J. Mat.*, vol. S, no. 1, pp. 280–283, 2019, doi: 10.26637/MJM0S01/0052.
[9] T. A. S and V. G, “k - Prime Labeling of One Point Union of Path Graph,” *Procedia Comput. Sci.*, vol. 172, pp. 649–654, 2020, doi: 10.1016/j.procs.2020.05.084.
[10] R. Grimaldi, “Fibonacci and Catalan Numbers : An Introduction”.
[11] D. C. Sekar and S. Chandrakala, “Fibonacci Prime Labeling Of Graphs,” 2018.
[12] D. M. Burton, *Elementary number theory*, 7. ed. New York: McGraw-Hill, 2011.
[13] S. Chandrakala and D. C. Sekar, “Fibonacci Prime Labeling Of Cycle Related Graphs,” vol. 04, no. 03, 2018.
[14] K. Periasamy and K. Venugopal, “Path Related kth Fibonacci Prime Labeling of Graphs,” *J. Pharm. Negat. Results*, vol. 13, no. 10, 2022.
[15] K. Periasamy and K. Venugopal, “Cycle Related Kth Fibonacci Prime Labeling Of Graphs,” vol. 11.
[16] P. K, V. K, and L. R. R. P, “Kth Fibonacci Prime Labeling of Graphs,” *Int. J. Math. Trends Technol.*, vol. 68, no. 5, pp. 61–67, May 2022, doi: 10.14445/22315373/IJMTT-V68I5P510.
[17] A. D. Baskar, S. Arockiaraj, and B. Rajendran, “Geometric Mean Labeling Of Graphs Obtained from Some Graph Operations”.
[18] T. S. Nurlaela and E. Sukaesih, “Rank dari Grup Dihedral Tiga (D3) yang Beraksi atas X^((1)),” *Kubik: Jurnal Publikasi Ilmiah Matematika*, vol. 2, no. 2, pp. 33–38, Nov. 2017, doi: 10.15575/kubik.v2i2.1858.
[19] S. Nursyahida, “A Collection of Minimally Path Square-Saturated Graphs,” *Kubik: Jurnal Publikasi Ilmiah Matematika*, vol. 5, no. 1, pp. 20–27, Oct. 2020, doi: 10.15575/kubik.v5i1.8415.