KETERHUBUNGAN GRAF PEMBAGI TAK NOL DARI RING

Oktaviana Putri[1, a)] Vika Yugi Kurniawan[1, b)]

[1]*Program Studi Matematika, Universitas Sebelas Maret*

[a)]*email: oktavianaputri2210@student.uns.ac.id*
[b)] *email: vikayugi@staff.uns.ac.id*

Abstrak

Misalkan R suatu ring. Graf pembagi tak nol dari R yang dinotasikan dengan $\Phi(R)$ merupakan graf sederhana yang himpunan *vertex*-nya adalah $V(\Phi(R)) = R\backslash\{0,1,-1\}$ di mana dua *vertex* berbeda $x, y \in V(\Phi(R))$ akan *adjacent* jika dan hanya jika $xy \neq 0$ atau $yx \neq 0$. Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji sifat-sifat dasar graf pembagi tak nol dari ring suatu ring. Sifat-sifat tersebut kemudian digunakan untuk menyelidiki syarat keterhubungan graf pembagi tak nol dari suatu ring. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur, yaitu dengan menghimpun dan mengkaji ulang berbagai sumber pustaka yang terkait dengan topik penelitian. Berdasarkan penyelidikan yang dilakukan, diperoleh hasil jika himpunan *vertex* $V(\Phi(R))$ mempunyai elemen invertible, maka $\Phi(R)$ merupakan graf yang terhubung. Kemudian untuk kasus ring Z_n diperoleh graf pembagi tak nol dari ring Z_n atau $\Phi(Z_n)$ akan menjadi graf terhubung jika dan hanya jika $n \notin \{1,2,3,6\}$. Selain itu, suatu graf $\Phi(R)$ akan menjadi graf terhubung jika R adalah ring tereduksi dengan $|V(\Phi(R))| > 3$.

Kata kunci: graf terhubung, pembagi tak nol, ring bilangan bulat modulo n, ring tereduksi

Abstract

Let R be a ring. Non-zero divisor graph of R, denoted by $\Phi(R)$, is a simple graph with set of vertices $V(\Phi(R)) = R\backslash\{0,1,-1\}$ and two distinct vertices $x, y \in V(\Phi(R))$ are *adjacent* if and only if $xy \neq 0$ or $yx \neq 0$. This research examines the basic properties of the non-zero divisor graph of a ring. These properties will be used to investigate the connectivity conditions for the non-zero divisor graph of a ring. The method used in this research is a literature study by collecting and reviewing various references related to the research topic. Based on the investigation, the result is that $\Phi(R)$ is a connected graph if the *vertex* set $V(\Phi(R))$ has invertible element. For the case of ring Z_n, the result $\Phi(Z_n)$ is a connected graph if and only if $n \notin \{1,2,3,6\}$. It is also obtained that a graph $\Phi(R)$ will be a connected graph if R is a reduced ring with $|V(\Phi(R))| > 3$.

Keywords: connected graph, non-zero divisor, ring of integer modulo n, reduced ring

Pendahuluan

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang dapat digunakan untuk menyederhanakan berbagai masalah. Masalah yang dapat direpresentasikan dengan graf biasanya terkait dengan struktur dan hubungan antar objek, sebagai contohnya antara lain sistem transportasi, jaringan telekomunikasi, dan struktur kimia. Selain itu, antar cabang ilmu matematika sendiri, teori graf juga bisa digunakan untuk merepresentasikan elemen-elemen dari suatu struktur aljabar dalam bentuk graf untuk menganalisis sifat-sifatnya. Penelitian pertama yang mengaitkan graf dengan struktur aljabar diperkenalkan oleh Beck [1] pada tahun 1988 yang mendefinisikan graf pembagi nol dari ring komutatif. Graf pembagi nol dari ring R merupakan graf sederhana yang himpunan *vertex*-nya terdiri dari elemen ring R termasuk 0 dan himpunan *edge*-nya adalah himpunan elemen (x, y) dimana $xy = 0$ untuk elemen $x, y \in R$. Jika $xy = 0$, dikatakan x dan y *adjacent*. Kemudian Anderson dan Livingston [2] mengembangkan konsep dari Beck dengan mendefinisikan ulang konsep graf pembagi nol. Anderson dan Livingston mendefinisikan graf pembagi nol dari ring R sebagai graf tak berarah dengan *vertex-vertex*nya adalah semua pembagi nol dari ring dan dua *vertex* terhubung jika perkalian *vertex-vertex* ini sama dengan nol. Selanjutnya banyak sekali penulis yang mengkaji konsep graf yang dikaitkan dengan struktur aljabar. Akbari dkk [3] pada tahun 2013 mengkaji tentang sifat-sifat dari graf irisan ideal dari suatu ring. Atani dkk [4] mendefinisikan graf total dari suatu semiring komutatif. Belakangan banyak penulis yang mengembangkan kembali konsep graf pembagi nol dari ring komutatif seperti [5], [6], [7], dan [8]. Pada tahun 2020, Kadem dkk. [9] mengembangkan penelitian graf pembagi nol menjadi graf pembagi tak nol dari ring. Sebagaimana yang ditulis dalam penelitian tersebut, graf pembagi tak nol dari ring R yang dinotasikan dengan $\Phi(R)$ merupakan graf dengan himpunan *vertex* $V(\Phi(R)) = R \backslash \{0,1,-1\}$. Dua *vertex* berbeda x dan y di $\Phi(R)$ *adjacent* jika dan hanya jika $xy \neq 0$ atau $yx \neq 0$. Berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh Kadem dkk [9] penulis akan mengkaji ulang sifat-sifat graf pembagi tak nol dari ring sehingga dapat mengetahui bagaimana syarat konektivitas graf pembagi tak nol dari ring bilangan bulat modulo n dan ring tereduksi.

Tinjauan Pustaka

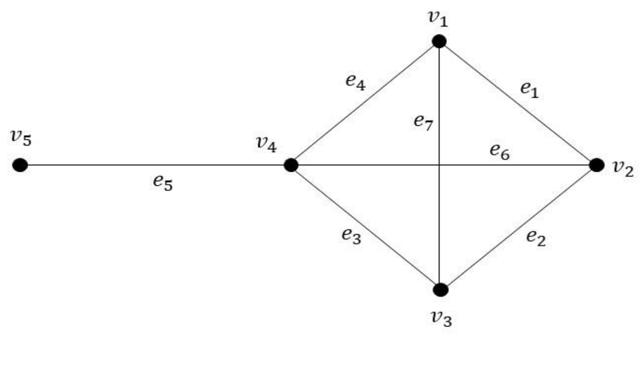
Artikel ini bertujuan untuk mengetahui syarat keterhubungan graf pembagi tak nol dari ring. Oleh karena itu, beberapa definisi yang mendasari penelitian perlu diuraikan. Beberapa definisi tersebut meliputi konsep dasar graf, ring dan graf pembagi tak nol.

1. Konsep Dasar Graf

Definisi-definisi tentang konsep dasar graf yang dibahas berikut merujuk pada Chartrand dan Zang [10].

Definisi 1.*Suatu graf G adalah himpunan tak kosong berhingga* $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ *yang disebut himpunan vertex dan himpunan yang mungkin kosong* $E(G) = \{e_1\ e_2, \dots, e_n\}$ *merupakan himpunan pasangan tidak berurutan dari anggota-anggota V(G) yang disebut edge.*

Setiap graf harus memuat minimal satu *vertex*, tetapi dimungkinkan tidak memiliki *edge*. Banyaknya *vertex* dari suatu graf G disebut order dinotasikan dengan $|V(G)|$ dan banyaknya *edge* dinotasikan dari graf G dengan $|E(G)|$. Pada Gambar 1, graf G_1 mempunyai $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E(G_1) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$, $|V(G_1)| = 5$, dan $|E(G_1)| = 7$.



Gambar 1. Graf G_1

Dua buah *vertex* disebut *adjacent* jika terdapat *edge* yang menghubungkan keduanya. Sebagai contoh, graf G_1 pada Gambar 1, *vertex* v_1 dan v_1 saling *adjacent* karena terdapat e_1 yang menghubungkannya, sedangkan v_1 dan v_5 tidak saling *adjacent*. Kemudian *edge* e_1 disebut *incident* dengan *vertex* v_1 dan v_2.

Definisi 2. *Suatu barisan berhingga dari vertex yang dimulai dengan vertex u dan berakhir di vertex v sedemikian sehingga vertex dalam deretan tersebut adjacent dalam suatu graf G disebut u-v walk.*

Definisi 3. *Suatu u-v walk pada graf G yang tidak terdapat vertex berulang disebut u-v path.*

Definisi 4. *Panjang dari path adalah banyaknya edge yang termuat dalam path tersebut.*

Sebagai contohnya perhatikan graf G_1 pada Gambar 2.1. barisan $v_1 - e_1 - v_2 - e_2 - v_3 - e_7 - v_1 - e_4 - v_4$ merupakan walk, sedangkan barisan $v_5 - e_5 - v_4 - e_4 - v_1 - e_1 - v_2$ merupakan path karena tidak mengulang sembarang *vertex*, dan panjang dari path terebut $d(v_5, v_2) = 3$.

Definisi.5. *Jarak antara u dan v dalam suatu graf G, dinotasikan dengan d(u–v) adalah panjang dari u-v path terpendek pada graf G.*

Definisi 6. *Suatu graf G merupakan graf terhubung (connected) jika terdapat suatu u–v path antara sebarang dua vertex di G. Graf yang hanya memiliki sebuah vertex tunggal juga dikatakan sebagai graf terhubung.*

Definisi 7. *Diameter dari graf sederhana G, dinotasikan dengan diam(G), adalah jarak terjauh antara semua pasangan vertex dari graf G.*

Pada contoh graf G_1 dengan Gambar 2.1, antara *vertex* v_2 dengan v_4 terdapat beberapa path yang menghubungkan yaitu $v_2 - e_1 - v_1 - e_4 - v_4$ atau $v_2 - e_2 - v_3 - e_3 - v_4$ atau $v_2 - e_6 - v_4$. Karena definisi jarak adalah panjang path terpendek maka jarak antara v_2 dengan v_4 adalah $d(v_2, v_4) = 1$ yang merupakan panjang dari path terpendek $v_2 - e_6 - v_4$.

2. Ring

Definisi-definisi tentang konsep ring yang akan dibahas berikut merujuk pada Fraleigh [11].

Definisi 8. *Suatu ring $(R, +, .)$ adalah himpunan R dengan dua operasi biner $+$ dan $.$, yang disebut dengan penjumlahan dan perkalian, didefinisikan pada R sedemikian sehingga aksioma berikut dipenuhi :*

(1) $(R, +)$ merupakan grup abelian.
(2) Operasi pergandaan bersifat asosiatif.
(3) Untuk semua $a, b, c \in R$, memenuhi sifat distribusi kiri, $a.(b + c) = (a.b) + (a.c)$, dan distribusi kanan, $(a + b).c = (a.c) + (b.c)$.

Definisi 9. *Diberikan R suatu ring, misalkan $a \in R, a$ merupakan elemen nilpoten dari ring R jika terdapat bilangan bulat positif n sedemikian sehingga $a^n = 0$. Himpunan nilpoten dari ring R dinotasikan dengan $N(R)$.*

Definisi 10. *Suatu ring dikatakan sebagai ring yang tereduksi jika tidak memiliki elemen nilpoten tak nol atau dengan kata lain elemen nilpotennya hanya nol.*

Definisi 11. *Diketahui R suatu ring dengan elemen satuan. Elemen $a \in R$ disebut elemen invertibel dari ring R jika terdapat $b \in R$ sedemikian sehingga $ab = 1$.*

3. Graf Pembagi Tak Nol

Definisi dasar yang akan dibahas merupakan definisi dari graf pembagi tak nol yang diambil dari Kadem [9].

Definisi 12. *Misalkan R adalah ring. Graf pembagi tak nol dari ring R dinotasikan $\Phi(R)$ adalah graf sederhana dengan himpunan vertex $V\big(\Phi(R)\big) = R\backslash\{0,1,-1\}$ dimana dua vertex berbeda $x, y \in V\big(\Phi(R)\big)$ adjacent jika dan hanya jika $xy \neq 0$ atau $yx \neq 0$.*

Hasil dan Diskusi

Pada bagian ini akan diuraikan hasil terkait sifat-sifat dasar dari graf pembagi tak nol dari ring $\Phi(R)$. Berikut diberikan teorema mengenai sifat yang menyatakan $\Phi(R)$ merupakan graf yang terhubung.

Lema 1 [9]. *Jika himpunan vertex $V\big(\Phi(R)\big)$ mempunyai elemen invertible, maka $\Phi(R)$ merupakan graf yang terhubung.*

Bukti. Misalkan $a \in V\big(\Phi(R)\big)$ adalah elemen *invertible* maka terdapat $b \in V\big(\Phi(R)\big)$ sehingga $ab = ba = 1$. Selanjutnya ambil sembarang x anggota $V\big(\Phi(R)\big)$. Andaikan $ax = 0$ atau $xa = 0$, maka diperoleh $x = 0$. Terjadi kontradiksi karena $0 \notin V\big(\Phi(R)\big)$. Dengan demikian elemen invertible a pasti *adjacent* dengan semua *vertex* yang lain atau $|Deg(a)| = \big|V\big(\Phi(R)\big)\big| - 1$, sehingga $\Phi(R)$ terhubung ■

Berikut diberikan contoh suatu graf pembagi tak nol yang dibentuk dari ring Z_5 dengan anggota himpunan *vertex* yang sesuai dengan syarat $\Phi(R)$ yaitu $V\big(\Phi(Z_5)\big) = \{2,3\}$. Karena anggota $V\big(\Phi(Z_5)\big)$ merupakan elemen *invertible* yang saling *adjacent*, maka $\Phi(Z_5)$ dikatakan sebagai graf terhubung seperti pada gambar 2.

Gambar 2. Graf Pembagi Tak Nol dari Z_5

Berikutnya akan diberikan sifat keterhubungan $\Phi(Z_n)$ untuk $n \notin \{1,2,3,6\}$. Untuk kasus ini digunakan pendekatan fungsi phi Euler $\phi(n)$ yang merepresentasikan banyaknya elemen invertible di ring Z_n. Selanjutnya, diberikan definisi fungsi phi Euler $\phi(n) = \prod_{i=1}^{s}\left(p_i^{\delta_i} - p_i^{\delta_i - 1}\right)$, sedemikian sehingga n bisa ditulis secara tunggal sebagai $n = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\delta_i}$ dengan $\delta_i \geq 1$ adalah bilangan bulat dan $p_i < p_{i+1}$ adalah bilangan prima. Perlu diketahui bahwa $\phi(n)$ menotasikan jumlah elemen *invertible* dalam ring bilangan bulat modulo n, berbeda dengan $\Phi(R)$ yang menotasikan graf pembagi tak nol dari ring R.

Lema 2 [9]. *Diketahui Z_n adalah ring bilangan bulat modulo n. Jika $n > 6$ maka $\phi(n) > 2$.*

Bukti. Misalkan $n = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\delta_i}$ maka $\phi(n) = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\delta_i} - p_i^{\delta_{i-1}}$. Dengan demikian diperoleh $\phi(n) = 2$ jika dan hanya jika terdapat j sehingga $p_j^{\delta_j} - p_j^{\delta_{j-1}} = 2$ dan $\Pi_{i=1, i\neq j}^{s}\left(p_i^{\delta_i} - p_i^{\delta_{i-1}}\right) = 1$. Hal ini tidak mungkin terjadi pada $n > 6$. ■

Dari Lema 2 bisa diperoleh syarat keterhubungan untuk graf pembagi tak nol dari ring bilangan bulat modulo n seperti yang disajikan pada teorema berikut.

Teorema 1 [9]. *Diketahui Z_n adalah ring bilangan bulat modulo n. Graf $\Phi(Z_n)$ akan menjadi graf terhubung jika dan hanya jika $n \notin \{1,2,3,6\}$.*

Bukti. Bukti teorema ini dibagi dalam beberapa kasus sebagai berikut :

1. Untuk $n \in \{1,2,3\}$ jelas tidak terbentuk graf karena tidak memiliki *vertex*.
2. Untuk $n = 4$, graf $\Phi(Z_4)$ hanya memiliki sebuah *vertex* yaitu $2 \in Z_4$ sehingga graf $\Phi(Z_4)$ bisa dikatakan terhubung karena hanya memiliki *vertex* tunggal.
3. Untuk $n = 5$, graf $\Phi(Z_5)$ memiliki dua *vertex* yaitu $2,3 \in Z_5$ yang saling *adjacent* karena $2 \cdot 3 = 1 \neq 0$. Dengan demikian graf $\Phi(Z_4)$ merupakan graf terhubung seperti yang diilustrasikan pada contoh sebelumnya.
4. Untuk $n = 6$, graf $\Phi(Z_6)$ memiliki tiga *vertex* yaitu $2,3,4 \in Z_6$. *Vertex* 3 merupakan *vertex* terasing karena $2.3 = 0$ dan $3.4 = 0$. Dengan demikian graf $\Phi(Z_6)$ merupakan graf yang tidak terhubung.
5. Untuk $n > 6$, menggunakan Lema 2 diperoleh bahwa $\phi(n) \geq 2$. Oleh karena itu selalu terdapat elemen *invertible* di himpunan *vertex* $V(\Phi(Z_n))$, sehingga akan diperoleh $\Phi(Z_n)$ merupakan graf terhubung dengan mengikuti Lema 1. ■

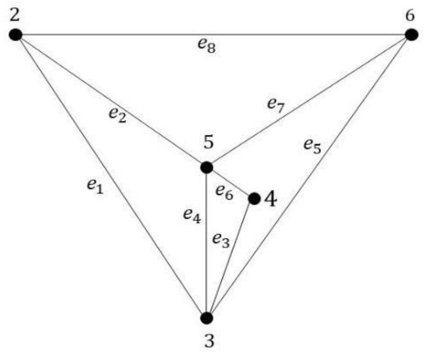
Berikut contoh $\Phi(Z_8)$ dengan Z_8 merupakan ring bilangan bulat modulo 8 yang selanjutnya akan didapatkan $V\left(\Phi(Z_8)\right) = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Dapat dilihat bahwa kondisi $\Phi(Z_8)$ sesuai dengan Lema 1 yang menjelaskan bahwa himpunan *vertex*nya memiliki elemen *invertible* yaitu 3 dan sesuai juga dengan Lema 2 karena $n = 8 > 6$.

Berikutnya akan diberikan tabel perkalian antar anggota himpunan *vertex* $V(\Phi(Z_8)) = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ untuk melihat keterhubungan antar *vertex*.

Tabel 1. Tabel perkalian elemen-elemen Z_8

Vertex	2	3	4	5	6
2	4	6	0	2	4
3	6	1	4	7	2
4	0	4	0	4	0
5	2	7	4	1	6
6	4	2	0	6	4

Berdasarkan perkalian elemen-elemen pada tabel 1 diperoleh *adjacency* antar *vertex* sehingga dapat dikonstruksikan graf $\Phi(Z_8)$ seperti pada Gambar 3.



Gambar 3. Graf Pembagi Tak Nol dari Z_8

Seperti yang terlihat pada Gambar 3, karena Z_8 memenuhi kondisi Lema 1 dan Lema 2 maka berakibat bahwa $\Phi(Z_8)$ merupakan graf terhubung dengan $Diam(\Phi(Z_8)) = 2$.

Teorema 2 [9]. *Misalkan R adalah ring. Jika $\Phi(R)$ adalah suatu graf terhubung dengan $R \ncong Z_2 \times Z_4$, maka $Diam(\Phi(R)) \leq 2$.*

Bukti. Diambil $x, y \in V(\Phi(R))$ dimana $x \neq y$. Jika $xy \neq 0$ maka jelas x dengan y saling *adjacent*. Berikutnya diasumsikan bahwa $xy = 0 = yx$. Karena $\Phi(R)$ merupakan graf terhubung maka terdapat $a, b \in V(\Phi(R))$ sedemikian sehingga $d(x,a) = d(y,b) = 1$ yang berarti ($ax \neq 0$ atau $xa \neq 0$) dan ($by \neq 0$ atau $yb \neq 0$). Sehingga terdapat dua kasus sebagai berikut.

1. Jika $d(y,a) = 1$ atau $d(x,b) = 1$, maka dalam kasus ini diperoleh $Diam(\Phi(R)) \leq 2$.
2. Jika $bx = xb = ay = ya = 0$ dan dimisalkan $w = a \pm b$, maka jelas bahwa $d(x,w) = 1 = d(y,w)$. Kemudian diasumsikan bahwa $a + b$ dan $a - b$ tidak termuat dalam $V(\Phi(R))$. Maka perlu dipertimbangkan subkasus berikut.
   a) Jika $a - b = 0$ atau $a + b = 0$, maka $ax = bx = 0$. Terjadi kontradiksi.
   b) Jika $a + b = 1$ dan $a - b = 1$. Maka didapatkan $ax = x, 2b = 0, 2a = 2$ dan $by = y$. Dari sini perlu diperhatikan juga
      i. jika $x^2 = 0$, maka diperoleh kasus berikut.
         - Jika $y^2 = 0$, ambil $q = y + 1$ sehingga berlaku $d(q,x) = d(q,y) = 1$. Menjadi salah jika $y = \pm 2$ dikalikan dengan a menghasilkan $0 = ay = 2a = 2$, yang berarti $y = 0$ sehingga terjadi kontradiksi.
         - Jika $y^2 \neq 0$, maka $x + 1, x - 1, y + a$, dan $y - a$ menghubungkan x dengan y dan hal ini tidak benar karena $R \ncong Z_2 \times Z_4$. Misalkan diambil $z \in V(\Phi(R))$ dengan $z \notin \{x, y, a, -a, b\}$. Jika $d(z,x) = d(y,z) = 1$ maka kasus selesai. Tetapi jika $d(x,z) = 1, d(y,z) = 0$ maka ambil $z + b$ dan jika $d(x,z) = 0, d(y,z) = 1$. Selainnya, ambil $z + 1$ untuk menghubungkan x dengan y.
      ii. Jika $x^2 \neq 0$, maka diperoleh kasus berikut
         - Jika $y^2 = 0$, maka $d(y + 1, x) = d(y + 1, y) = 1$ dan ini menjadi salah jika $y = \pm 2$. Karena jika dikalikan dengan a menghasilkan $0 = ay = 2a = 2$ yang artinya $y = 0$ sehingga terjadi kontradiksi.
         - Jika $y^2 \neq 0$, maka $x + y \in V(\Phi(R))$ menghubungkan x dan y.
   c) Jika $a + b = -1$ dan $a - b = -1$, maka didapatkan $ax = -x, 2b = 0, 2a = -2$, $by = -y = y$ dan $2y = 0$. Selanjutnya dapat digunakan argument dalam kasus (b) sebelumnya untuk menunjukkan $Diam(\Phi(R)) = 2$.
   d) Jika $a + b = -1$ dan $a - b = 1$, maka diperoleh $ax = x, 2b = b, 2a = 0, by = -y$ dan $2x = 0$. Maka perlu dipertimbangkan subkasus berikut.
      i. jika $x^2 = 0$, maka diperhatikan
         - Jika $y^2 = 0$, dengan mengambil $w = x + 1$ maka jelas $d(w,x) = d(w,y) = 1$. Hal ini salah karena jika $x = \pm 2$ dikalikan dengan a akan menghasilkan $0 = bx = 2b = 2$ yang artinya $x = 0$ sehingga terjadi kontradiksi.
         - Jika $y^2 \neq 0$, maka $x + 1$ dan $x - 1$ menghubungka x dengan y. Ini artinya $ax = 2a = 0$ sehingga juga terjadi kontradiksi.
      ii. jika $x^2 \neq 0$, maka perhatikan
         - Jika $y^2 = 0$ maka $y + 1, y - 1, x + b$ dan $x - b$ menghubungkan x dengan y. Hal ini jelas salah karena $R \ncong Z_2 \times Z_4$ yang memiliki diameter tiga. Selanjutnya diambil $z \in V(\Phi(R))$ dengan $z \notin \{x, y, a, -a, b\}$. Jika $d(z,x) = d(y,z) = 1$ maka terbukti. Namun apabila $d(x,z) = 1, d(y,z) = 0$ ambil $z + b$ dan jika

$d(x,z) = 0, d(y,z) = 1$ maka ambil $z + a$. Selainnya ambil $z + 1$ untuk menghubungkan x dengan y.

- Jika $y^2 \neq 0$, maka $x + y \in V(\Phi(R))$ menghubungkan x dengan y.

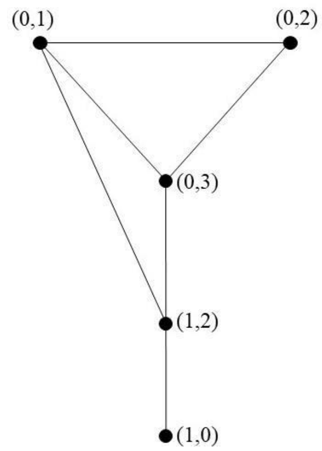
e) Jika $a + b = 1$ dan $a - b = -1$, akan didapatkan $ax = x, 2b = b, 2a = 0, by = y$ dan $2x = 0$. Gunakan argumen pada kasus (d) sebelumnya untuk memperoleh $Diam(\Phi(R)) \leq 2$. ■

Sebagai ilustrasi untuk memahami Teorema 2 diambil contoh $Z_2 = \{0,1\}$ dan $Z_4 = \{0,1,2,3\}$ sehingga diperoleh $Z_2 \times Z_4 = \{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,1),(1,2),(1,3)\}$. Dari $Z_2 \times Z_4$, didapatkan *vertex* yang memenuhi syarat graf pembagi tak nol yaitu $V(\Phi(Z_2 \times Z_4)) = \{(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,2)\}$.

Tabel 2. Perkalian elemen $Z_2 \times Z_4$

$Z_2 \times Z_4$	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(1,0)	(1,2)
(0,1)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,0)	(0,2)
(0,2)	(0,2)	(0,0)	(0,2)	(0,0)	(0,0)
(0,3)	(0,3)	(0,2)	(0,1)	(0,0)	(0,2)
(1,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(1,0)	(1,0)
(1,2)	(0,2)	(0,0)	(0,2)	(1,0)	(1,0)

Berdasarkan perkalian *vertex* pada Tabel 2 didapatkan graf pembagi tak nol dari $Z_2 \times Z_4$ seperti pada Gambar 4.



Gambar 4. Graf Pembagi Tak Nol dari $Z_2 \times Z_4$ [9]

Pada gambar tersebut, terlihat bahwa graf yang terbentuk memiliki $Diam(\Phi(Z_2 \times Z_4)) = 3$ sehingga menunjukkan bahwa graf pembagi tak nol dari ring $Z_2 \times Z_4$ memiliki diameter lebih besar dari 2 dan hal ini sesuai dengan Teorema 2.

Teorema 3 [9]. *Jika R adalah ring tereduksi dengan $|V(\Phi(R))| > 3$, maka $\Phi(R)$ merupakan graf yang terhubung.*

Bukti. Diambil dua *vertex* $x, y \in V(\Phi(R))$. Jika $d(x,y) = 1$, maka jelas x dan y saling *adjacent*. Selanjutnya jika $d(x,y) \neq 1$, maka $xy = yx = 0$. Perlu dipertimbangkan beberapa kasus sebagai berikut.

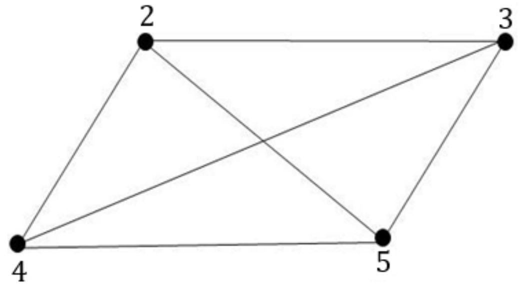
1. Jika R tidak memiliki elemen satu maka $x + y$ menghubungkan x dan y . Jika $x + y = 0$ maka $x^2 = 0$ terjadi kontradiksi dengan R sebagai ring tereduksi.
2. Jika R memiliki elemen satu maka $x + y = 1$. Karena $|V(\Phi(R))| > 3$ maka terdapat $z \neq w \in V(R)\backslash\{x, y\}$. Selanjutnya perlu dipertimbangkan beberapa subkasus berikut ini.
   a) Jika $zx = 0 = zy$ maka $z - 1$ menghubungkan dengan x dengan y, dan hal ini menjadi salah jika $z = 2$. Dalam kasus ini $z + 1$ menghubungkan x dengan y juga salah jika $z \neq -2$. Jika kedua kasus tersebut salah maka diperoleh $4 = 0$ yang berarti $z^2 = 0$ sehingga terjadi kontradiksi.
   b) Jika $zx \neq 0 \neq zy$, maka z menghubungkan x dengan y.
   c) Jika $zx \neq, zy = 0$, maka $z + y$ akan menghubungkan x dengan y hanya jika $z + y \neq -1$. Jika $z + y = -1$, akan didapatkan $2y = 0, x^2 = x, z^2 = -z$, dan $x = -z$. Jika w sama dengan 1 atau 2 maka kasus selesai. Namun, jika tidak akan diperoleh beberapa subkasus berikut
      i. Jika $wy \neq 0, wx = 0$, maka $w + x$ menghubungkan x dengan y sehingga menjadi salah jika $w + x = -1$. Akibatnya $2x = 0, y^2 = y, w^2 = -w$, dan $y = -w$, yang berarti $x = z$ sehingga terjadi kontradiksi.
      ii. Jika $wy = 0, wx \neq 0$ maka $w + y$ menghubungkan x dengan y sehingga menjadi salah jika $w + y = -1$. Karena itu diperoleh $w + y = z + y$ yang artinya $w = z$ sehingga terjadi kontradiksi.
   d) Jika $zx = 0, zy \neq 0$, maka sama dengan kasus sebelumnya dapat diperoleh *path* di antara x dan y.
3. Jika R memiliki elemen satu sehingga $x + y = -1$, maka langkah pembuktian ini sama dengan pada kasus (2). ■

Untuk dapat memahami Teorema 3. dengan baik, berikut diberikan contoh kasus ring tereduksi yaitu ring yang tidak mempunyai elemen nilpoten tak nol. Diketahui ring Z_7 dengan anggota $Z_7 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ merupakan ring tereduksi. Selanjutnya sesuai dengan definisi graf pembagi tak nol dari ring maka diperoleh himpunan *vertex* dari $\Phi(Z_7)$ yaitu $V(\Phi(Z_7)) = \{2,3,4,5\}$ yang menunjukkan bahwa $|V(\Phi(Z_7))| = 4 > 3$. Dari himpunan *vertex* tersebut, akan diselidiki keterhubungan antar *vertex* melalui pada tabel perkalian sebagai berikut.

Tabel 3. Perkalian antar *vertex* di $\Phi(Z_7)$

vertex	2	3	4	5
2	4	6	1	3
3	6	2	5	1
4	1	5	2	6
5	3	1	6	4

Berdasarkan Tabel 3 dapat dilihat perkalian antar dua *vertex* tidak ada yang menghasilkan nilai nol sehingga setiap *vertex* di $\Phi(Z_7)$ *adjacent* dengan semua *vertex* yang lain. Diperoleh graf $\Phi(Z_7)$ seperti pada Gambar 5.



Gambar 5. Graf Pembagi tak nol dari Z_7

Dari gambar 5 dapat diketahui bahwa ring Z_7 memenuhi syarat pada Teorema 3 yaitu ring tereduksi dengan $|V(\Phi(Z_7))| > 3$ sehingga graf pembagi tak nol dari ring Z_7 merupakan graf terhubung.

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dan teorema-teorema yang telah dibuktikan, dapat diambil kesimpulan tentang keterhubungan graf pembagi tak nol dari ring $\Phi(R)$ sebagai berikut :

1. Graf pembagi tak nol dari ring Z_n atau $\Phi(Z_n)$ merupakan graf terhubung jika $n \notin \{1,2,3,6\}$.
2. Jika $\Phi(Z_n)$ merupakan graf terhubung dengan $R \ncong Z_2 \times Z_4$ maka $Diam\big(\Phi(R)\big) \leq 2$.
3. Jika R adalah ring tereduksi dengan $\left|V\big(\Phi(R)\big)\right| > 3$ maka $\Phi(R)$ merupakan graf terhubung.

Ucapan Terima Kasih

Penulis menyampaikan terima kasih kepada LPPM Universitas Sebelas Maret yang telah mendanai penelitian ini melalui Hibah Grup Riset Tahun Anggaran 2023, serta semua instansi maupun perseorangan yang telah memberikan dukungan moril dan materiil selama pelaksanaan penelitian dan penulisan artikel.

Daftar Pustaka

[1] I. Beck, “Coloring of Commutative Ring”, Journal of Algebra, Vol. 116, No. 1, pp. 208-226, 1988
[2] D.F. Anderson and P.S. Livingston, “The Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring”, Journal of Algebra, 217, pp. 434-447, 1999
[3] S. Akbari, R. Nikandish, and M. J. Nikmehr, “Some results on the intersection graphs of ideals of rings”, J. Algebra Appl. 12, no. 4, 1250200, 13 pp., 2012
[4] S.E. Atani, S.D.P. Hesari, and M. Khoramdel, “Total graph of a commutative semiring with respect to identity-summand elements, J. Korean Math. Soc. 51 no. 3, 593–607, 2014
[5] M.R. Ashidiqi, V.Y. Kurniawan, and P.H. Utomo, “Graf Annihilator dari Ring Komutatif”. Prosiding KNPMP V UMS (2020), 5 Agustus, Sukoharjo, Indonesia, pp.293-302
[6] Soleha, Dian W., Setyowati, Satrio A.W., “Kajian Sifat-Sifat Graf Pembagi-Nol dari Ring Komutatif dengan Elemen Satuan”, Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika UNESA (2015), 25 April, Surabaya, Indonesia, pp.492-501
[7] V.Y. Kurniawan, “Zero Divisor Graf of Semiring of Matrices over Boolean Semiring”, Natural Science: Journal of Science and Technology, Vol. 7(1) : 127-137, 2018
[8] Celikel, E.C., “Triple Zero Graph of Commutative Ring”, Communications Faculty of Sciences University of Ankara, Series A1 Mathematics and Statistics, Vol. 70(2), pp: 653-663, 2021
[9] S. Kadem, A. Aubad and A.H. Majeed, “The non-zero divisor graph of a ring”, Itaian Journal of Pure and Applied Mathematics, N.43 : 975-983, 2020

[10] G. Chartrand, and P. Zhang, “A First Course in Graph Theory”, Dover Publications, New York, 2012
[11] J.B. Fraleight, “A first Course in Abstract Algebra”, Pearson Education, Vermont, 2002