Kaitan Ruang Vektor Matriks $\mathbf{V_n}$ dan $\mathbf{C_n}$

Inne Syafrian Putri[1, a)], Alfina Rifda Anindya[2, b)], dan Esih Sukaesih[3, c)]

[1, 2, 3]*Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sunan Gunung Djati*
Jl. A H Nasution No. 105 Bandung

[a)]*email:* innesyafrian@uinsgd.ac.id
[b)] email: alfinannd@gmail.com
[c)] email: esih_s@uinsgd.ac.id

Abstrak

V_n didefinisikan sebagai himpunan matriks $n \times n$ dengan sifat penjumlahan silang. Himpunan V_n membentuk subruang dari ruang vektor $\mathbb{R}^{n\times n}$ dengan karakteristik tertentu. Selanjutnya terdapat himpunan matriks co-latin C_n yang didefinisikan menggunakan matriks latin, yaitu matriks $n \times n$ dengan elemen $\{1,2,\dots,n\}$ yang muncul tepat satu kali pada setiap baris dan kolom. Dalam artikel ini dikaji keterkaitan antara ruang vektor V_n dan C_n untuk menjawab permasalahan bagaimana memperoleh matriks dengan sifat penjumlahan silang dengan mudah.
Kata kunci: Sifat Penjumlahan Silang, Matriks Latin, Matriks Co-latin

Abstract

Let V_n is defined as a set of matrices that have vertex cross sum properties. Set V_n is subspace of vector space $\mathbb{R}^{n\times n}$ with some characteristic. Set C_n, which is defined using Latin matrix, is an $n \times n$ matrix with the elements $\{1,2,\dots,n\}$ appearing exactly once in each row and column. This paper aims to provide relationship between V_n and C_n, and to answer how to get a matrix with vertex cross sum properties easily.
Keywords: Vertex Cross Sum Properties, Latin Matrix, co-latin Matrix

Pendahuluan

Himpunan matriks dengan sifat penjumlahan konstan yang dinotasikan dengan S_n dan himpunan matriks dengan sifat penjumlahan silang yang dinotasikan dengan V_n telah dikaji oleh S. L. Hill, M. C. Lettington dan K. M. Schmidt pada tahun 2017 [1]. Adapun konsep matriks latin yang diperkenalkan oleh Euler pada tahun 1700-an [1] memiliki sifat penjumlahan konstan, yaitu jumlah elemen dalam setiap baris dan setiap kolom adalah 1, 2, ..., n. Beberapa peneliti lain seperti Jia-yu Shao dan Wan-di Wei pada tahun 1992 [2], Bhaskar Bagchi pada tahun 2012 [3] serta Zhaoqi Zhang pada tahun 2019 [4] berkontribusi dalam mengkaji pendefinisian lebih dalam mengenai matriks latin. Selanjutnya, matriks latin dapat dijadikan acuan untuk mendapatkan matriks co-latin.

N. J. Higham, M. C. Lettington dan K. M Schmidt pada tahun 2021 memperkenalkan matriks co-latin yaitu matriks $n \times n$ dengan penjumlahan entri yang tidak terletak pada baris atau kolom yang sama adalah nol [5]. Akibatnya, penjumlahan setiap entri pada matriks co-latin juga nol, sehingga matriks dengan sifat penjumlahan silang dapat dipandang sebagai matriks co-latin. Dalam artikel ini dibahas keterkaitan antara ruang vektor matriks co-latin (C_n) dan ruang vektor matriks dengan sifat penjumlahan silang (V_n).

Konsep Dasar Ruang Vektor

Berikut ini diberikan definisi ruang vektor yang menjadi objek utama dalam artikel penelitian ini.

Definisi 1. [6] Himpunan tak kosong V disebut ruang vektor jika operasi penambahan dan perkalian dengan suatu bilangan yang disebut skalar dapat dilakukan, asalkan memenuhi aksioma-aksioma tertentu.:

1. Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ di V maka $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ di V
2. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$ untuk semua $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ di V
3. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ untuk semua $\mathbf{u},\mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$ di V
4. Terdapat 0 di V sehingga 0 + $\mathbf{u}$ = $\mathbf{u}$ + 0 = $\mathbf{u}$ untuk semua $\mathbf{u}$ di V
5. Untuk setiap $\mathbf{u}$ di V, terdapat $-\mathbf{u}$ di V sehingga $\mathbf{u}$ + $(-\mathbf{u})$ = 0
6. Jika k adalah sebarang skalar dan $\mathbf{u}$ di V, maka $k\,\mathbf{u}$ di V
7. $k(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = k\,\mathbf{u} + k\,\mathbf{u}$ untuk setiap skalar k dan setiap $\mathbf{u},\mathbf{v}$ di V
8. $(k + l)\,\mathbf{u} = k\,\mathbf{u} + l\,\mathbf{u}$ untuk setiap skalar k dan l dan setiap $\mathbf{u}$ di V
9. $k(l\,\mathbf{u}) = (kl)\,\mathbf{u}$ untuk setiap skalar k dan l dan setiap $\mathbf{u}$ di V
10. $1\,\mathbf{u} = \mathbf{u}$ untuk setiap $\mathbf{u}$ di V

Suatu sub-himpunan dari sebuah ruang vektor juga dapat membentuk ruang vektor dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar yang sama. Sub-himpunan tersebut juga harus memenuhi sepuluh aksioma ruang vektor, akan tetapi tidak semua perlu dibuktikan karena hubungan sub-himpunan yang membuat beberapa aksioma sudah jelas terpenuhi sehingga didefinisikan subruang sebagai berikut.

Definisi 2. [6][1] Sub-himpunan tak kosong S dari sebuah ruang vektor V dikatakan subruang dari V jika S memenuhi kondisi:

1. Jika k adalah sebarang skalar dan u sebarang vektor pada S, maka ku di S
2. Jika u dan v di S maka $u + v$ di S

Definisi 3. [6] Misalkan $\mathbf{u}=(u_1,u_2,\dots,u_n)$ dan $\mathbf{v}=(v_1,v_2,\dots,v_n)$ merupakan vektor-vektor di $\mathbb{R}^n$. Hasil kali titik dari $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ dinotasikan dengan $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ dinyatakan sebagai:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n \tag{1}$$

Terdapat cara lain untuk menyatakan hasil kali titik $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$. Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ didefinisikan sebagai matriks kolom, maka hasil kali titik dapat dinyatakan sebagai:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}^T\mathbf{v}=\mathbf{v}^T\mathbf{u} \tag{2}$$

dengan $\mathbf{u}^T$ adalah transpos dari $\mathbf{u}$.

Definisi 4. [7],[8] Dua vektor tak nol $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ di $\mathbb{R}^n$ dikatakan ortogonal jika $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ = 0. Vektor nol di $\mathbb{R}^n$ ortogonal untuk setiap vektor di $\mathbb{R}^n$.

Pada pembahasan selanjutnya, 1_n merupakan vektor di $\mathbb{R}^n$ yang semua entrinya 1 dan $\{1_n\}^\perp$ merupakan himpunan semua vektor yang ortogonal dengan vektor 1_n.

Hasil dan Diskusi

Ruang Vektor V_n

Definisi 5. [5][12] Misalkan $n \in \mathbb{N}$ dan $V = (v_{ij})_{i,j=1}^{n}$ adalah sebarang matriks berukuran $n \times n$. Matriks V dikatakan mempunyai sifat penjumlahan silang (*vertex cross sum property*) jika memenuhi:

$$v_{i,j} + v_{k,l} = v_{i,l} + v_{k,j} \quad (3)$$

dan

$$\sum_{i,j=1}^{n} v_{i,j} = 0 \quad (4)$$

untuk setiap $i, j, k, l \in \{1,2, \ldots, n\}$

Contoh 6.

Matriks $V = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 \\ 0 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix}$ mempunyai sifat penjumlahan silang.

Untuk mendapatkan sebuah matriks sebarang yang memenuhi sifat penjumlahan silang tidak cukup mudah karena harus memperhatikan entri-entri matriks tersebut memenuhi persamaan (3) dan (4). Oleh karena itu definisi berikut memberikan suatu cara mendapatkan matriks yang memenuhi sifat penjumlahan silang dengan mengoperasikan dua vektor yang ortogonal terhadap vektor 1_n.

Definisi 7. [5] Misalkan V_n merupakan himpunan matriks yang memiliki sifat penjumlahan silang, maka $V \in V_n$ jika dan hanya jika terdapat vektor $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \{1_n\}^{\perp}$ sehingga:

$$V = \mathbf{a}1_n^T + 1_n\mathbf{b}^T \quad (5)$$

Contoh 8.

Terdapat vektor $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \in \{1_3\}^{\perp}$ sehingga

$$\mathbf{a}1_n^T + 1_n\mathbf{b}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}(1 \quad 1 \quad 1) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}(-2 \quad 5 \quad -3) = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 \\ 0 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in V_3$$

Teorema berikut menunjukkan bahwa himpunan matriks yang memiliki sifat penjumlahan silang merupakan suatu ruang vektor dengan suatu karakteristik yang dikaitkan dengan vektor yang ortogonal terhadap vektor 1_n.

Teorema 9. [1],[5] Misalkan V_n merupakan himpunan matriks yang memiliki sifat penjumlahan silang, maka V_n merupakan subruang vektor $\mathbb{R}^{n\times n}$ dan memiliki karakteristik sebagai berikut:

$$V_n = \{M \in \mathbb{R}^{n\times n} : \mathbf{u}^T M\mathbf{v} = 0 = 1_n^T M 1_n; \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \{1_n\}^{\perp}\} \quad (6)$$

dengan $\{1_n\}^{\perp} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{u}^T 1_n = 0\}$.

Bukti. Akan dibuktikan V_n merupakan subruang vektor $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Terdapat $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \in V_n$, sehingga V_n bukan himpunan kosong.

Berdasarkan definisi 5, jelas $V_n \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$.

Ambil sebarang $V = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix} \in V_n,\ W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & w_{n2} & \dots & w_{nn} \end{bmatrix} \in V_n$ dan $k \in \mathbb{R}$.

Sehingga $v_{i,j} + v_{k,l} = v_{i,l} + v_{k,j}$ untuk setiap $i, j, k, l \in \{1,2, \dots, n\}$

dan $w_{i,j} + w_{k,l} = w_{i,l} + w_{k,j}$ untuk setiap $i, j, k, l \in \{1,2, \dots, n\}$

$$kV = \begin{bmatrix} kv_{11} & kv_{12} & \dots & kv_{1n} \\ kv_{21} & kv_{22} & \dots & kv_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ kv_{n1} & kv_{n2} & \dots & kv_{nn} \end{bmatrix}$$

$$kv_{i,j} + kv_{k,l} = k(v_{i,j} + v_{k,l}) = k\left(v_{i,l} + v_{k,j}\right) = kv_{i,l} + kv_{k,j}$$

Jadi, kV mempunyai sifat penjumlahan vertex cross.

$$V + W = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & w_{n2} & \dots & w_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left(v_{i,j} + w_{i,j}\right) + \left(v_{k,l} + w_{k,l}\right) &= \left(v_{i,j} + v_{k,l}\right) + (w_{i,j} + w_{k,l}) \\ &= \left(v_{i,l} + v_{k,j}\right) + (w_{i,l} + w_{k,j}) \\ &= \left(v_{i,l} + w_{i,l}\right) + (v_{k,j} + w_{k,j}) \end{aligned}$$

Jadi $V + W$ mempunyai sifat penjumlahan silang.

Karena kV dan $V + W$ juga mempunyai sifat penjumlahan silang, maka kV dan $V + W \in V_n$.

Terbukti V_n adalah subruang dari $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Selanjutnya akan dibuktikan $V_n = \{M \in \mathbb{R}^{n\times n} : \mathbf{u}^T M \mathbf{v} = 0 = 1_n^T M 1_n; \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \{1_n\}^\perp\}$.

Menurut definisi 7, $M \in V_n$ jika dan hanya jika $M = \mathbf{u}1_n^T + 1_n\mathbf{v}^T$ dengan $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \{1_n\}^\perp$.

Akan dibuktikan jika $\mathbf{u}^T M \mathbf{v} = 0 = 1_n^T M 1_n$ dengan $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \{1_n\}^\perp$, maka $M = \mathbf{u}1_n^T + 1_n\mathbf{v}^T$.

Misalkan $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ memenuhi $\mathbf{u}^T M \mathbf{v} = 0 = 1_n^T M 1_n$ dengan $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \{1_n\}^\perp$.

1. Karena $\mathbf{u}^T M \mathbf{v} = 0$ dengan $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \{1_n\}^\perp$, maka haruslah $M\mathbf{v} = \mathbb{R}1_n$, sehingga:
   $\mathbf{u}^T M \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbb{R} 1_n = \mathbf{u}^T \mathbf{v}^T \mathbf{v} 1_n = \mathbf{u}^T 1_n \mathbf{v}^T \mathbf{v} = 0$
   Maka $M = 1_n\mathbf{v}^T$.
   Misalkan $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$, maka $M = 1_n\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix}$.
   Karena $\mathbf{v} \in \{1_n\}^\perp$ maka $v_1 + v_2 + \dots + v_n = 0$ dan $m_{i,j} + m_{k,l} = m_{i,l} + m_{k,j}$.
   Hal ini sesuai dengan definisi 5, sehingga $M = 1_n\mathbf{v}^T \in V_n$.
2. Karena $1_n^T M 1_n = 0$ dengan $\mathbf{u} \in \{1_n\}^\perp$, maka haruslah $M1_n = \mathbb{R}\mathbf{u}$, sehingga:

   $1_n^T M 1_n = 1_n^T \mathbb{R}\mathbf{u} = 1_n^T 1_n^T 1_n \mathbf{u} = 1_n^T \mathbf{u} 1_n^T 1_n = 0$
   Maka $M = \mathbf{u}1_n^T$.
   Misalkan $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ maka $M = \mathbf{u}1_n^T = \begin{bmatrix} u_1 & u_1 & \dots & u_1 \\ u_2 & u_2 & \dots & u_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n & u_n & \dots & u_n \end{bmatrix}$.
   Karena $\mathbf{u} \in \{1_n\}^\perp$ maka $u_1 + u_2 + \dots + u_n = 0$ dan $m_{i,j} + m_{k,l} = m_{i,l} + m_{k,j}$.

Hal ini sesuai dengan definisi 1, sehingga $M = \mathbf{u}1_n^T \in V_n$.

Karena V_n merupakan ruang vektor maka V_n memenuhi sifat tertutup terhadap penjumlahan, sehingga $M = \mathbf{u}1_n^T + 1_n\mathbf{v}^T \in V_n$.

Oleh karena itu, benar jika $\mathbf{u}^T M\mathbf{v} = 0 = 1_n^T M 1_n$ dengan $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \{1_n\}^\perp$ maka $M = \mathbf{u}1_n^T + 1_n\mathbf{v}^T$.

Selanjutnya, akan dibuktikan jika $M = \mathbf{u}1_n^T + 1_n\mathbf{v}^T$ maka $\mathbf{u}^T M\mathbf{v} = 0 = 1_n^T M 1_n$ dengan $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \{1_n\}^\perp$.

Misalkan $M \in V_n$, maka terdapat $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \{1_n\}^\perp$ sehingga $M = \mathbf{u}1_n^T + 1_n\mathbf{v}^T$. Akibatnya,

$\mathbf{u}^T M\mathbf{v} = \mathbf{u}^T(\mathbf{u}1_n^T + 1_n\mathbf{v}^T)\mathbf{v} = \mathbf{u}^T\mathbf{u}1_n^T\mathbf{v} + \mathbf{u}^T 1_n\mathbf{v}^T\mathbf{v} = \mathbf{u}^\mathbf{T}\mathbf{u}(0) + (0)\mathbf{v}^T\mathbf{v} = 0$

dan

$1_n^T M 1_n = 1_n^T(\mathbf{u}1_n^T + 1_n\mathbf{v}^\mathbf{T})1_n = 1_n^T\mathbf{u}1_n^T 1_n + 1_n^T 1_n\mathbf{v}^T 1_n = (0)1_n^T 1_n + 1_n^T 1_n(0) = 0$

Oleh karena itu, benar jika $M = \mathbf{u}1_n^T + 1_n\mathbf{v}^T$ maka $\mathbf{u}^T M\mathbf{v} = 0 = 1_n^T M 1_n$ dengan $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \{1_n\}^\perp$.■

Himpunan Matriks Co-latin

Definisi 10. [5],[9],[10] Sebuah matriks $L = \left(l_{p,q}\right)_{p,q=1}^n$ berukuran $n \times n$ di mana pada setiap baris dan kolomnya entri $\{1,2,\dots,n\}$ muncul tepat satu kali matriks latin. Dengan $k \in \{1,2,\dots,n\}$, $L^{(-1)}(k)$ merupakan himpunan posisi setiap entri yang bernilai sama pada matriks latin L. Dengan kata lain,

$$L^{(-1)}(k) = \{(p,q) \in \{1,\dots,n\}^2 :\ l_{p,q} = k\} \tag{7}$$

Definisi 11. [5] Matriks co-latin adalah sebuah matriks C = $\left(c_{i,j}\right)_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ yang memenuhi:

$$\textstyle\sum_{(p,q)\in L^{(-1)}(k)} c_{p,q} = 0 \tag{8}$$

untuk semua $k = \{1,2,\dots,n\}$ dan k adalah nilai entri dari matriks latin yang bersesuaian. Adapun C_n adalah himpunan matriks co-latin berukuran $n \times n$.

Matriks co-latin erat kaitannya dengan matriks latin. Matriks co-latin dapat dikatakan sebagai matriks yang penjumlahan entri-entri pada baris atau kolom berbeda adalah nol, juga berdasarkan definisi 10, kemunculan masing-masing entrinya dijamin tepat satu kali pada masing-masing baris dan kolomnya . Oleh karena itu, entri yang sama pada matriks latin dapat dijadikan acuan untuk menentukan penjumlahan entri-entri yang tidak terletak pada baris atau kolom yang sama pada matriks co-latin.

Contoh 12.

Matriks $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -4 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ adalah matriks co-latin

karena terdapat matriks latin $L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ sehingga

$$\sum_{(p,q)\in L^{(-1)}(1)} c_{p,q} = c_{1,1} + c_{2,3} + c_{3,2} = 3 + (-3) + 0 = 0$$

$$\sum_{(p,q)\in L^{(-1)}(2)} c_{p,q} = c_{1,2} + c_{2,1} + c_{3,3} = 5 + (-4) + (-1) = 0$$

$$\sum_{(p,q)\in L^{(-1)}(3)} c_{p,q} = c_{1,3} + c_{2,2} + c_{3,1} = 4 + (-2) + (-2) = 0$$

Kaitan Ruang Vektor V_n dan C_n

Matriks co-latin memiliki kesamaan dengan matriks yang memiliki sifat penjumlahan silang. Definisi 5 menyatakan bahwa matriks yang memiliki sifat penjumlahan silang memenuhi $\sum_{i,j=1}^{n} m_{i,j} = 0$, dengan kata lain penjumlahan setiap entri pada matriks tersebut adalah nol. Ketentuan ini juga berlaku untuk matriks co-latin. Ketika penjumlahan entri-entri yang tidak terletak pada baris atau kolom yang sama adalah nol, maka jelas hasil dari penjumlahan semua entri juga akan nol. Lebih lanjut himpunan matriks co-latin adalah sama dengan himpunan matriks dengan sifat penjumlahan silang.

Teorema 13. [5] Misalkan V_n adalah himpunan matriks dengan sifat penjumlahan silang dan C_n merupakan himpunan matriks co-latin, maka $C_n = V_n$.

Bukti:

Akan dibuktikan $C_n \subseteq V_n$.

1. Pernyataan ini trivial untuk kasus $n = 1$.
2. Misalkan $C = \left(c_{i,j}\right)_{i,j=1}^{n}$ adalah matriks co-latin dengan $n \in \mathbb{N}\backslash\{1,3\}$

   Akan ditunjukkan C memenuhi sifat penjumlahan vertex cross.

   Misalkan $i, j, k, l \in \{1,2, \dots, n\}$ dengan $i \neq k$ dan $j \neq l$.

   Terdapat matriks latin $L = \left(l_{p,q}\right)_{p,q=1}^{n}$ sehingga $l_{i,j} = l_{k,l} = 1$ dan $l_{i,l} = l_{k,j} = 2$.

   Menurut definisi matriks co-latin, $\sum_{(p,q)\in L^{(-1)}(a)} c_{p,q} = 0$, dengan $a = 1$ maka:

$$\sum\nolimits_{(p,q)\in L^{(-1)}(1)} c_{p,q} = 0$$

$$c_{i,j} + c_{k,l} + \sum\nolimits_{(p,q)\in L^{(-1)}(1)\backslash\{(i,j),(k,l)\}} c_{p,q} = 0$$

$$c_{i,j} + c_{k,l} = -\sum\nolimits_{(p,q)\in L^{(-1)}(1)\backslash\{(i,j),(k,l)\}} c_{p,q}$$

   Selanjutnya, terdapat matriks latin $L' = \left(l'_{p,q}\right)_{p,q=1}^{n}$ dengan entri sama seperti L kecuali $l'_{i,j} = l'_{k,l} = 2$ dan $l_{i,l} = l_{k,j} = 1$.

   Menurut definisi matriks co-latin, $\sum_{(p,q)\in L'^{(-1)}(a)} c_{p,q} = 0$, dengan $a = 1$ maka:

$$\sum\nolimits_{(p,q)\in L'^{(-1)}(1)} c_{p,q} = 0$$

$$c_{i,l} + c_{k,j} + \sum\nolimits_{(p,q)\in L'^{(-1)}(1)\backslash\{(i,l),(k,j)\}} c_{p,q} = 0$$

$$c_{i,l} + c_{k,j} = -\sum\nolimits_{(p,q)\in L'^{(-1)}(1)\backslash\{(i,l),(k,j)\}} c_{p,q}$$

   Karena $-\sum_{(p,q)\in L^{(-1)}(1)\backslash\{(i,j),(k,l)\}} c_{p,q} = -\sum_{(p,q)\in L'^{(-1)}(1)\backslash\{(i,l),(k,j)\}} c_{p,q}$, maka matriks C memenuhi sifat penjumlahan vertex cross $c_{i,j} + c_{k,l} = c_{i,l} + c_{k,j}$.
3. Misalkan $C \in V_n$.

   Misalkan diambil dua matriks latin 3×3 sebagai berikut:

   (i) $\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} B & A & C \\ C & B & A \\ A & C & B \end{pmatrix}$

Akan ditunjukkan C memenuhi sifat penjumlahan vertex cross.

Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $i = j = 1$ dan $k = l = 2$.

Menurut definisi matriks co-latin, $\sum_{(p,q)\in L^{(-1)}(a)} c_{p,q} = 0$,

Maka matriks latin (1) menunjukkan $\sum_{(p,q)\in L^{(-1)}(B)} c_{p,q} = 0$

$$c_{1,2} + c_{2,1} + c_{3,3} = 0$$
$$c_{1,2} + c_{2,1} = -c_{3,3}$$

dan matriks latin (2) menunjukkan $\sum_{(p,q)\in L^{(-1)}(B)} c_{p,q} = 0$

$$c_{1,1} + c_{2,2} + c_{3,3} = 0$$
$$c_{1,1} + c_{2,2} = -c_{3,3}$$

Sehingga terdapat C memenuhi sifat penjumlahan silang $c_{i,j} + c_{k,l} = c_{i,l} + c_{k,j}$.

Sehingga, benar bahwa $C_n \subseteq V_n$.

Selanjutnya, akan dibuktikan $V_n \subseteq C_n$.

Berdasarkan definisi 7, $V \in V_n$ jika dan hanya jika $V = \mathbf{a}1_n^T + 1_n\mathbf{b}^T$ dengan $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \{1_n\}^\perp$.

Misalkan $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \{1_n\}^\perp$ dan $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \{1_n\}^\perp$.

$$V = \mathbf{a}1_n^T + 1_n\mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1] + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n]$$
$$= \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & \dots & a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix}$$

Berdasarkan definisi 11, matriks co-latin merupakan matriks dengan penjumlahan entri yang tidak terletak pada baris dan kolom yang sama adalah 0. Hal ini berlaku juga pada $\mathbf{a}1_n^T$ dan $1_n\mathbf{b}^T$ dengan $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \{1_n\}^\perp$. Untuk setiap kemungkinan matriks latin, $\sum_{(p,q)\in L^{(-1)}(k)} a_{p,q}$ akan menghasilkan $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ dan untuk setiap kemungkinan matriks latin, $\sum_{(p,q)\in L^{(-1)}(k)} b_{p,q}$ akan menghasilkan $b_1 + b_2 + \dots + b_n = 0$.

Sehingga, benar bahwa $V_n \subseteq C_n$.

Karena $C_n \subseteq V_n$ dan $V_n \subseteq C_n$, maka $C_n = V_n$. ∎

Akibat 14. Himpunan matriks co-latin C_n adalah subruang vektor $\mathbb{R}^{n\times n}$ dan memiliki karakteristik sebagai berikut:

$$C_n = \{C \in \mathbb{R}^{n\times n} : \mathbf{u}^T C \mathbf{v} = 0 = 1_n^T C 1_n; \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \{1_n\}^\perp\} \tag{9}$$

dengan $\{1_n\}^\perp = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{u}^T 1_n = 0\}$.

Sebelumnya, untuk membentuk sebarang matriks $V = [v_{i,j}]$ dengan sifat penjumlahan silang seperti contoh 6 tidak cukup mudah karena harus memperhatikan terpenuhi $v_{i,j} + v_{k,l} = v_{i,l} + v_{k,j}$ dan

$\sum_{i,j=1}^{n} v_{i,j} = 0$ untuk setiap $i, j, k, l \in \{1,2, \dots, n\}$. Matriks pada contoh 6 diperoleh setelah memperhatikan definisi 7. Akan tetapi, setelah dibuktikan bahwa $C_n = V_n$, maka untuk memperoleh matriks dengan sifat penjumlahan silang menjadi lebih mudah dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Buat sebarang matriks $M = \left(m_{i,j}\right)_{i,j=1}^{n}$
2. Pilih $\{k_1, k_2, \dots, k_n\} \subseteq \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = 0$
3. Posisikan $k_1, k_2, \dots, k_n$ pada baris dan kolom berbeda dalam matriks M
4. Ulangi langkah 2 dan 3 untuk $\{k_1, k_2, \dots, k_n\} \subseteq \mathbb{R}$ yang berbeda sampai seluruh matriks M terisi sepenuhnya. Tetapi pastikan selama proses pengisian untuk memperhatikan entri-entri sebelumnya agar memenuhi $m_{i,j} + m_{k,l} = m_{i,l} + m_{k,j}$

Kesimpulan

Suatu matriks dengan sifat penjumlahan silang dapat dipandang sebagai matriks co-latin. Himpunan matriks co-latin (C_n) membentuk ruang vektor yang sama dengan himpunan matriks dengan sifat penjumlahan silang (V_n). Oleh karena itu, ruang vektor C_n memiliki karakteristik yang sama dengan V_n, yaitu untuk setiap $C \in C_n$ dan $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \{1_n\}^{\perp}$, berlaku:

$$\mathbf{u}^T C \mathbf{v} = 0 = 1_n^T C 1_n$$

Referensi

[1] S. L. Hill, M. C. Lettington, and K. M. Schmidt, “On superalgebras of matrices with symmetry properties,” *Linear Multilinear Algebr.*, 2017.

[2] J. yu Shao and W. di Wei, “A formula for the number of Latin squares,” *Discrete Math.*, 1992.

[3] B. Bagchi, “Latin squares,” *Resonance*, 2012.

[4] Z. ZHANG, “The Map, A New Method to Define Latin Square,” *DEStech Trans. Environ. Energy Earth Sci.*, 2019.

[5] N. J. Higham, M. C. Lettington, and K. M. Schmidt, “Integer matrix factorisations, superalgebras and the quadratic form obstruction,” *Linear Algebra Appl.*, 2021.

[6] H. Anton, Aljabar Linear Elementer, Edisi 5. Erlangga, 1987.

[7] S. J. Leon, Linear Algebra with Applications Global Edition, 2015.

[8] H. Anton and C. Rorres, Elementer Linear Algebra, Edisi 11, John Wiley and Sond, 2011.

[9] D. Keedwell and J. Denes, *Latin Square and Application*. 2016.

[10] J. T. E. Richardson, “The use of Latin-square designs in educational and psychological research,” *Educ. Res. Rev.*, 2018.

[11] T. S. Nurlaela and E. Sukaesih, “Rank dari Grup Dihedral Tiga (D3) yang Beraksi atas X^((1)),” *Kubik: Jurnal Publikasi Ilmiah Matematika*, vol. 2, no. 2, pp. 33–38, Nov. 2017, doi: 10.15575/kubik.v2i2.1858.

[12] S. Nursyahida, S. Rana, and E. Sukaesih, “Vertex Labeled Energy of Edge-Removed Complete Graphs,” *KUBIK: Jurnal Publikasi Ilmiah Matematika*, vol. 8, no. 1, pp. 44–49, May 2023, doi: 10.15575/kubik.v8i1.30073.