

Aplikasi Matriks Hessian Pada Model EPQ (*Economic Production Quantity*) dengan Kendala Rework

Elis Ratna Wulan

Juruan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sunan Gunung Djati
Jl. A H Nasution No. 105 Bandung

elisrwulan@yahoo.com

Abstrak

Perkembangan industri yang semakin kompetitif, menuntut perusahaan untuk dapat meningkatkan efisiensi dan efektivitas dalam kegiatan operasinya, Salah satu upaya yang dapat dilakukan adalah mengendalikan persediaan dengan menghasilkan produk berkualitas baik tetapi dengan biaya operasional seminimum mungkin. Pada model ini digambarkan dua komponen antara perusahaan dan pelanggan, dengan kebijakan pengiriman bertahap. Model ini mengasumsikan semua item cacat pada saat proses produksi dianggap diperbaiki (*rework*) pada selang waktu *reorder point*.

Kata kunci: Persediaan, Matriks Hessian, EPQ (*Economic Production Quantity*)

Pendahuluan

Permasalahan dilematis kelebihan dan kekurangan dari persediaan menyebabkan perusahaan harus menentukan kebijakan persediaan yang optimal. Berkaitan dengan kondisi tersebut, maka diperlukan perencanaan dan pengawasan (pengendalian) persediaan mencakup seluruh kegiatan mulai dari penentuan jumlah dan jenis bahan yang diproduksi, pencarian sumber atau tempat memperolehnya, cara pembeliannya, pengangkutannya ke tempat mana setiap jenis bahan diperlukan [1]. Model persediaan EPQ (*Economic Production Quantity*) dipakai untuk jumlah produksi optimal yang ekonomis bagi perusahaan yang memproduksi bahan bakunya sendiri (perusahaan manufaktur). [2].

Penentuan jumlah lot optimal dalam kasus pengerjaan produk kembali (*rework*) telah banyak dibahas dalam penelitian terdahulu seperti Gelder dan Mabini (1992) dan Heuvela (2004) dalam Nurhayati (2012) membahas tentang penentuan lot yang optimal dengan *remanufacturing/rework* pada sistem persediaan satu tingkat (persediaan di gudang produk jadi). Kiesmuller (2002) dalam Nurhayati (2012) melakukan penentuan lot dengan pendekatan heuristik untuk kombinasi manufaktur dan remanufaktur dengan mempertimbangkan *lead time* yang berbeda untuk sistem persediaan satu tingkat. Mitra (2006) dalam Nurhayati (2012) menentukan lot optimal pada sistem persediaan dua tingkat (depot dan distributor) untuk kondisi *push remanufacturing*, Teunter dan van der Laan (2005) dalam Nurhayati (2012) melakukan pencarian ukuran lot yang optimal dengan heuristik dengan kebijakan *push* dan *pull remanufacturing* [6]. Penentuan jumlah produksi dan pengiriman optimal yang bertujuan meminimumkan total biaya, menggunakan aplikasi matriks Hessian pada model EPQ dengan kendala *rework* akan dibahas pada penelitian ini.

Bahan dan Persediaan

1. Persediaan

Persediaan adalah bahan atau barang yang disimpan yang akan digunakan untuk memenuhi tujuan tertentu, misalnya untuk proses produksi atau perakitan, untuk dijual kembali, untuk suku cadang dari suatu peralatan atau mesin. Persediaan dapat berupa bahan mentah, barang dalam proses, barang jadi,

ataupun suku cadang [4]. Pada sebuah sampel (data asli PT.PINDAD Div Tempa dan Cor), dimana divisi Cor II mempersentasikan sebuah kondisi memakai sistem EPQ dengan kendala produk cacat dihasilkan dan produk cacat tersebut diperbaiki kembali (*rework*), karena bahan baku terbuat dari “**metal manganese 55i**” dan merupakan produk bernilai jual tinggi maka bila terdapat produk tidak lolos inspeksi produk tersebut dapat dilebur kembali.

2. Matriks Hessian

Matriks Hessian merupakan salah satu cara yang dapat digunakan untuk mencari penyelesaian optimum dengan kendala. Penggunaan matriks Hessian untuk mendapatkan suatu nilai optimal [7]. Optimisasi merupakan suatu proses untuk mencari kondisi yang optimum. Optimisasi bisa berupa maksimasi atau minimasi. Jika berkaitan dengan masalah keuntungan, maka keadaan optimum adalah keadaan yang memberikan keuntungan maksimum (**maksimasi**). Jika berkaitan dengan masalah pengeluaran atau pengorbanan minimum (**minimasi**). Secara umum, fungsi yang akan dimaksimumkan atau diminimumkan disebut **fungsi objektif (objective function)**, sedangkan harga-harga yang berpengaruh dan bisa dipilih disebut **variabel (peubah)** atau **decision variabel** [7]. Jika dimisalkan x adalah variabel keputusan dan $f(x)$ adalah fungsi tujuan dari suatu masalah dengan n variabel yang memiliki turunan parsial kedua dan turunannya kontinu, matriks Hessian $f(x)$ ditulis $H(f)$ adalah:

$$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

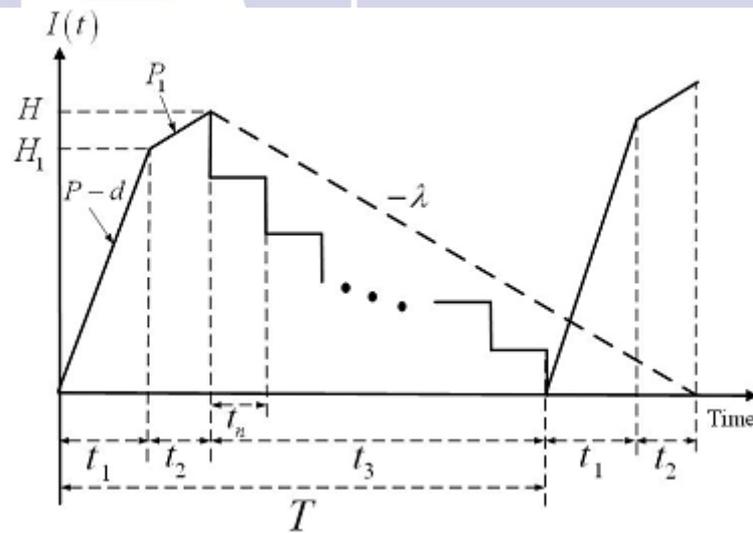
Matriks Hessian dapat digunakan untuk melakukan uji turunan kedua fungsi lebih dari satu variabel, yaitu untuk mengidentifikasi optimum relatif dari nilai fungsi tersebut. Penggolongan titik stasioner fungsi dua variabel dengan menggunakan matriks Hessian, misalkan $f(x) = F(x_1, \dots, x_n)$ adalah fungsi bernilai real di mana semua turunan parsialnya kontinu.

3. Model EPQ dengan Kendala *Rework*

Sistem produksi manufaktur EPQ dengan kendala *Rework* adalah selama waktu produksi yang teratur terdapat x barang cacat yang diproduksi secara acak pada tingkat produksi d . Semua item yang cacat diperbaiki dan diproduksi ulang pada tingkat P_1 pada akhir siklus proses produksi reguler.

Untuk menghindari kekurangan (*stock out*), maka tingkat penambahan persediaan P lebih besar dari tingkat produksi produk cacat d dan tingkat permintaan λ , yaitu $(P - d - \lambda) > 0$ atau $(1 - x - \frac{\lambda}{P}) > 0$, di mana tingkat produksi item cacat d , dapat dinyatakan sebagai $d = Px$. Semua item yang cacat diperbaiki dan diproduksi ulang (*Rework*) pada tingkat P_1 pada akhir siklus proses produksi reguler.

Selanjutnya, dipertimbangkan kebijakan pengiriman bertahap, diasumsikan bahwa hanya item selesai yang dapat dikirim ke pelanggan, jika seluruh produk jadi adalah produk berkualitas sempurna dan terjamin pada akhir pengerjaan ulang. Kuantitas tetap, n angsuran dari batch yang telah selesai diperbaiki dikirim ke pelanggan pada interval waktu yang tetap, pada interval waktu t_3 . Catatan jumlah persediaan atau produk jadi dari model EPQ dengan kendala *Rework* digambarkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Catatan Status Produk Berkualitas Sempurna dalam Persediaan Model EPQ dengan Kendala Rework [6]

a. Siklus Putaran Produksi pada Model EPQ dengan Kendala Rework

Pada model EPQ dengan kendala Rework persediaan sebesar Q datang secara bertahap selama selang waktu t_1 , bila P adalah tingkat pertambahan persediaan dan d merupakan tingkat produksi cacat, karena saat produksi regular berlangsung terdapat produk cacat x yang dihasilkan dengan tingkat pertumbuhan sebesar d , dimana tingkat pertumbuhan produksi P lebih besar dari pertumbuhan produk cacat d atau ($P > d$), sehingga tingkat pertumbuhan persediaan pada saat t_1 adalah $(P - d)$ artinya untuk memenuhi persediaan sebesar Q diperlukan waktu selama t_1 dengan tingkat pertumbuhan sebesar $(P - d)$. Dari sini dapat diketahui persediaan maksimum H_1 yang dihasilkan setelah produksi regular adalah :

$$t_1 = \frac{Q}{P - d} = \frac{H_1}{P - d} \tag{3}$$

Setelah diketahui terdapat x produk cacat, selanjutnya produk cacat tersebut melalui proses Rework. Dengan tingkat persediaan produk cacat setelah di Rework sebesar P_1 dan waktu yang dibutuhkan untuk pengerjaan ulang Rework adalah t_2 , maka persediaan maksimum H setelah proses Rework berakhir, adalah:

Publikasi Ilmiah Matematika

$$t_2 = \frac{xQ}{P_1} \tag{4}$$

Selama selang waktu t_3 dimana persediaan maksimum telah diperoleh dan siap dikirimkan kepada konsumen dengan kuantitas tetap n dan interval waktu yang tetap t_n , sehingga persediaan maksimum H berkurang sampai ke titik 0, yang selanjutnya siklus putaran produksi T yang baru akan dimulai kembali.

$$t_3 = T - (t_1 + t_2) = Q \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{P} - \frac{x}{P_1} \right) \tag{5}$$

Dari sini dapat diketahui siklus tiap putaran produksi T untuk model EPQ dengan kendala Rework adalah :

$$T = t_1 + t_2 + t_3 \tag{6}$$

b. Konsep Persediaan Maksimum dalam Model EPQ dengan Kendala Rework

Gambar 1 menggambarkan bagaimana persediaan maksimum terbentuk. Jika D adalah kebutuhan setiap siklus produksi, maka secara kumulatif jumlah pertambahan persediaan menjadi Q , dengan tingkat pertumbuhan persediaan sebesar $(P - d)$, yaitu sesuai dengan permintaan D . Oleh karena itu akumulasi pertambahan persediaan hanya terjadi selama selang waktu t_1 yaitu sebesar H_1 . Dimana terdapat tingkat produksi item cacat dihasilkan $d = Px$.

$$H_1 = t_1(P - d) = \frac{Q}{P}(P - d) = Q \left(1 - \frac{d}{P}\right) = Q(1 - x) \quad (7)$$

Selang t_2 merupakan waktu *Rework* untuk produk cacat, dimana x persediaan diperbaiki. Disini dapat terlihat tingkat persediaan maksimum H dimana persediaan produk jadi saat t_1 yang lolos uji standar ditambah dengan produk cacat yang di *Rework* saat t_2 dengan tingkat pertambahan sebesar P_1 , sehingga dapat diketahui jumlah persediaan maksimum Q yang dihasilkan adalah:

$$H = H_1 + P_1 t_2 = Q \quad (8)$$

Catatan status inventori untuk produk cacat yang dihasilkan selama selang waktu t_1 adalah dt_1 , dimana :

$$dt_1 = Pxt_1 = xQ \quad (9)$$

c. Biaya Persediaan pada Model EPQ dengan Kendala *Rework*

Model EPQ dengan kendala *Rework* ini mengandung biaya-biaya yang diperhitungkan, diantaranya adalah:

1) Biaya persiapan / *set up cost* (K).

Set up cost (K), ongkos persiapan adalah semua pengeluaran yang ditimbulkan untuk persiapan produksi suatu produk.[2].

2) Biaya Produksi (CQ)

Biaya produksi (CQ), merupakan perhitungan harga pokok produksi atau biaya yang harus dikeluarkan oleh perusahaan untuk memproduksi barang yang dibuat atau dipesan.

3) Biaya *Rework*. C_R

Biaya *Rework* $C_R[xQ]$ atau disebut sebagai biaya pengerjaan ulang, yang diakibatkan oleh barang cacat yang dihasilkan x pada tingkat produksi Q . atau merupakan perkalian dari biaya *rework* C_R dengan kuantitas produk cacat yang dihasilkan pada tingkat produksi regular berakhir xQ

4) Biaya pengiriman C_T .

Biaya pengiriman adalah biaya yang harus dikeluarkan oleh perusahaan untuk menyampaikan barang kepada konsumen. Biaya pengiriman per item adalah $C_T \left(\frac{H}{n}\right)$, jika K_1 adalah biaya pengiriman per pengiriman, maka biaya pengiriman menjadi:

$$K_1 + C_T \left(\frac{H}{n}\right) \quad (10)$$

Maka, biaya pengiriman total per pengiriman untuk n batch dalam siklus satu putaran produksi T adalah :

$$n \left[K_1 + C_T \left(\frac{H}{n}\right) \right] = n K_1 + C_T H = n K_1 + C_T Q \quad (11)$$

5) Biaya simpan.

Biaya simpan oleh perusahaan berkaitan dengan penyimpanan persediaan. Semakin banyak dan semakin lama persediaan disimpan maka semakin besar biaya itu. Dalam model ini terdapat 3 biaya simpan diantaranya adalah :

a) Biaya simpan produk jadi selama selang waktu t_2 .

Biaya penyimpanan dalam setiap siklus ini dapat ditentukan dari perkalian antara ongkos simpan h_1 tiap unit produk persatuan waktu dengan rata-rata jumlah barang yang disimpan:

$$h_1 \frac{P_1 t_2}{2} (t_2) \quad (12)$$

b) Biaya simpan produk cacat (h) selama selang waktu t_1 dan t_2

Rata-rata persediaan disimpan adalah:

$$\frac{(H_1 + dt_1) - 0}{2} (t_1) \quad (13)$$

Ketika proses *rework* berakhir t_2 dan tingkat persediaan setelah proses ini adalah H sehingga persediaan maksimum menjadi $H_1 + H (t_2)$, rata-rata barang yang disimpan menjadi:

$$\frac{(H_1+H)-0}{2}(t_2) \tag{14}$$

Sehingga biaya simpan h menjadi :

$$h \left[\frac{(H_1+dt_1)}{2}(t_1) + \frac{(H_1+H)}{2}(t_2) \right] \tag{15}$$

c) Biaya simpan untuk selang waktu t_3

Biaya simpan produk jadi oleh perusahaan:

$$h \left[\frac{n-1}{2n} \right] H t_3 \tag{16}$$

Didefinisikan biaya simpan untuk perusahaan untuk selang waktu pengiriman t_3 adalah :

untuk $n = n - 1$ atau $\frac{H}{n}$, biaya simpan selama t_3 menjadi:

$$h \left[\frac{1}{n^2} \right] \left[\sum_{i=1}^{n-1} i \right] H t_3 = h \left[\frac{1}{n^2} \right] \left[\frac{n(n-1)}{2} \right] H t_3 = h \left[\frac{(n-1)}{2n} \right] H t_3 \tag{17}$$

Biaya simpan untuk produk jadi yang disimpan oleh konsumen selama waktu pengiriman t_3 adalah sebagai berikut:

$$\frac{h_2}{2} \left[\frac{H}{n} t_3 + T(H - \lambda t_3) \right] \tag{18}$$

Permintaan sebesar D dapat dipenuhi sesuai dengan persediaan yang dihasilkan sebesar H .

$$D = \frac{H}{n} \tag{19}$$

$$t_n = \frac{t_3}{n} \tag{20}$$

sehingga jumlah produk yang akan tersisa (I), setelah memenuhi permintaan selama interval waktu tetap (λt_n) adalah:

$$I = D - \lambda t_n \tag{21}$$

Persediaan rata- rata ketika produk jadi disampaikan kepada konsumen menjadi :

$$Q_{AVG} = \frac{h_2}{2} \left[\frac{H}{n} t_3 + T(H - \lambda t_3) \right] \tag{22}$$

Susunan secara lengkap untuk biaya persediaan model dengan kendala *Rework*, adalah sebagai berikut[3]:

$$TC(Q, n) = CQ + K + C_R[xQ] + C_T[Q] + n K_1 + h_1 \frac{P_1 \cdot t_2}{2} (t_2) + h \left[\frac{(H_1+dt_1)}{2}(t_1) + \frac{(H_1+H)}{2}(t_2) + \left[\frac{n-1}{2n} \right] H t_3 \right] + \frac{h_2}{2} \left[\frac{H}{n} t_3 + T(H - \lambda t_3) \right] \tag{23}$$

Dari persamaan biaya persediaan (23), dapat diketahui secara acak tingkat kerusakan produk cacat x dalam siklus T , atau disebut dengan rata-rata total biaya persediaan persiklus T , dengan menggunakan persamaan (3) sampai (13) diperoleh $E[TCU(Q, n)] = \frac{E[TC(Q, n)]}{E[T]}$ adalah:

$$E[T] = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{Q}{P} + \frac{Qx}{P_1} + \left[\frac{Q}{\lambda} - \frac{Q}{P} - \frac{Qx}{P_1} \right] = \frac{Q}{\lambda} \tag{24}$$

$$E[TCU(Q, n)] = \frac{E[TC(Q, n)]}{E[T]} = C\lambda + \frac{(K + nK_1)\lambda}{Q} + C_R E[x]\lambda + C_T\lambda + \frac{hQ\lambda}{2P} + \frac{hQ\lambda}{2P_1} [2E[x] - (E[x])^2] + \left(\frac{n-1}{n} \right) \left[\frac{hQ}{2} - \frac{hQ\lambda}{2P} - \frac{hQE[x]\lambda}{2P_1} \right] + \frac{h_1 E[x^2] Q \lambda}{2P_1} + \left(\frac{1}{n} \right) \frac{h_2 Q}{2} + \left(1 - \frac{1}{n} \right) \frac{h_2 Q \lambda}{2P} + \frac{h_2 Q}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{n} \right) \frac{E[x]\lambda}{P_1} \right] \tag{25}$$

Untuk mendapatkan $E[TCU(Q, n)]$ minimum yang merupakan biaya total produksi, maka variabel keputusan Q dan n harus diminimumkan, dengan syarat, $\frac{\partial[TCU(Q, n)]}{\partial Q} = 0$, maka

$$Q^2 = \frac{2(K + nK_1)\lambda}{\frac{h\lambda}{P} + \frac{h\lambda}{P_1} [2E[x] - (E[x])^2] + \frac{h_1 E[x^2]\lambda}{P_1} + \left(\frac{h_2}{n}\right) + \left(\frac{n-1}{n}\right) \left[h + (h_2 - h) \left(\frac{\lambda}{P} + \frac{E[x]}{P_1} \right) \right]} \quad (26)$$

$$Q = \sqrt{\frac{2(K + nK_1)\lambda}{\frac{h\lambda}{P} + \frac{h\lambda}{P_1} [2E[x] - (E[x])^2] + \frac{h_1 E[x^2]\lambda}{P_1} + \left(\frac{h_2}{n}\right) + \left(\frac{n-1}{n}\right) \left[h + (h_2 - h) \left(\frac{\lambda}{P} + \frac{E[x]}{P_1} \right) \right]}} \quad (27)$$

Persamaan (26) merupakan formulasi model EPQ dengan kendala Rework untuk menentukan lot produksi Q optimal. Dan untuk $\frac{\partial[TCU(Q, n)]}{\partial n} = 0$, maka berdasarkan persamaan (5) menjadi:

$$n^2 = \frac{Q^2(h_2 - h) \left(1 - \left[\frac{\lambda}{P} + \frac{E[x]\lambda}{P_1} \right] \right)}{2K_1\lambda} \quad (28)$$

Substitusikan persamaan (26) untuk memperoleh n frekuensi optimal, sehingga diperoleh :

$$n = \sqrt{\frac{K(h_2 - h) \left(1 - \left[\frac{\lambda}{P} + \frac{E[x]\lambda}{P_1} \right] \right)}{K_1 \left[\frac{hE[x]\lambda}{P_1} (1 - E[x]) + h + \frac{h_1(E[x])^2\lambda}{P_1} + h_2 \left[\frac{\lambda}{P} + \frac{E[x]\lambda}{P_1} \right] \right]}} \quad (29)$$

Persamaan (26) dan (28) merupakan formulasi untuk model EPQ dengan kendala *Rework* dengan Q menunjukkan ukuran lot produksi yang optimal dan n menunjukkan jumlah frekuensi pengiriman tetap yang optimal.

Hasil dan Pembahasan

1. Analisis Data Menggunakan Matriks Hessian

Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data sekunder dari Nurhayati (2012), di mana sampel perusahaan yang dijadikan objek penelitian yaitu PT. PINDAD (Persero) Divisi TEMPA dan COR untuk proyek pembuatan TOP SPURS GEAR BOX berdasarkan pesanan PT. HENKA. Data dan estimasi biaya-biaya produksi dari PT. PINDAD untuk produksi divisi COR II periode maret 2012, adapun rincian nilai parameternya adalah sebagai berikut[6]:

- a. Jumlah permintaan konsumen terhadap pembuatan produk TOP SPURS GEAR BOX setelah deal kontrak tertanggal maret 2012 adalah, $\lambda = 50$ unit.
- b. Laju pertambahan produksi $P = 144$ unit/tahun.
Analisis: waktu kerja 1 tahun = 48 minggu.
Laju produksi perminggu $3 \times 48 = 144$ unit/tahun. Sehingga pertambahan persediaan perminggu $p = 3$.
- c. Berdasarkan estimasi pihak PVC tingkat kerusakan x diasumsikan berdasarkan distribusi seragam adalah $x = [0, 0.3]$ dan semua item cacat x diperbaiki pada tingkat produksi $P_1 = 24$ unit/tahun. $E[x] = 0.15$. Sehingga proses perbaikan produk perminggu $p_1 = 2$.
- d. Parameter biaya- biaya
 1. Biaya *Rework* per unit, $C_R = \text{Rp. } 330.000$
 2. Biaya per unit produksi, $C = \text{Rp. } 6.000.000,00$
 3. Biaya Set Up produksi, $K = \text{Rp. } 8.000.000,00$

4. Biaya simpan pertahun adalah Rp. 1.400.000,00
Maka berdasarkan estimasi pihak PVC terhadap model adalah
 $h_1 = \text{Rp. } 200.000,00$ $h_2 = \text{Rp. } 400.000,00$ $h_3 = \text{Rp. } 800.000,00$
5. Biaya pengiriman per pengiriman, $K_1 = \text{Rp. } 250.000,00$ dan biaya pengiriman per item, $C_T = \text{Rp. } 25.0000$.

Hasil Perhitungan Data menggunakan Model EPQ dengan Kendala Rework[6]:

- a. Berdasarkan persamaan (38) maka frekuensi pengiriman optimal (n) untuk produk TOP SPURS GEAR BOX adalah :

$$n = \sqrt{\frac{8.000(800 - 200) \left(1 - \left[\frac{50}{144} + \frac{0,15(50)}{24}\right]\right)}{250 \left[\frac{200(0,15)50}{24} (1 - 0,15) + 200 + \frac{400(0,15)^2 50}{24} + 800 \left[\frac{50}{144} + \frac{0,15(50)}{24}\right]\right]}}$$

$$= \sqrt{\frac{8.000(600)(1 - 0,66)}{250[62,5(0,85) + 200 + 18,75 + 800(0,66)]}} =$$

Berdasarkan formulasi model diperoleh, frekuensi pengiriman optimal dilakukan 3 kali selama rentang waktu t_3 .

- b. Menentukan lot produksi optimal Q (36) untuk produksi TOP Spurs Gear Box adalah:

$$= \sqrt{\frac{2(8.000 + 3(250))50}{\frac{200(50)}{144} + \frac{200(50)}{24} [2(0,15) - (0,15)^2] + \frac{400(0,0225)50}{24} + \left(\frac{400}{3}\right) + \left(\frac{3-1}{3}\right) \left[200 + (600) \left(\frac{50}{144} + \frac{0,15}{24}\right)\right]}}$$

$$Q = 34$$

dengan demikian untuk memenuhi permintaan sebesar 50 unit, akan terjadi siklus produksi selama $\frac{\lambda}{Q} = 1,5$ atau akan terjadi 2 siklus produksi. Untuk itu dapat diketahui pula:

$$t_1 = \frac{34}{3} = 11 \text{ minggu}$$

Dan waktu rework untuk produk cacat diperbaiki t_2 adalah:

$$t_2 = \frac{(0,3)34}{2} = 5 \text{ minggu}$$

Waktu pengiriman t_3 adalah, dimana T adalah satu siklus putaran produksi

$$T = \frac{Q}{\lambda} = \frac{34}{50} = 0,68$$

$$t_3 = 34 \left(\frac{1}{50} - \frac{1}{144} - \frac{0,3}{24} \right) = 0,0189 = 1 \text{ minggu}$$

$$T = 11 + 5 + 1 = 17 \text{ minggu}$$

Dan jumlah persediaan maksimum saat t_1 yaitu H_1 dan saat t_2 yaitu H adalah:

$$H_1 = Q(1 - x)$$

$$H_1 = 34(1 - 0,3) = 23,8$$

$$H = H_1 + P_1 t_2 = Q$$

$$H = 23,8 + 24(0,425) = 34$$

$$d = px = 3(0,3) = 0,9 = 1$$

c. Biaya persediaan selama satu siklus produksi:

$$E[TCU(Q, n)] = 61.679,51$$

Uji konveksitas dengan determinan matriks Hessian untuk model EPQ dengan kendala Rework adalah :

$$|H| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2[TCU(Q, n)]}{\partial Q^2} & \frac{\partial^2[TCU(Q, n)]}{\partial Q \partial n} \\ \frac{\partial^2[TCU(Q, n)]}{\partial n \partial Q} & \frac{\partial^2[TCU(Q, n)]}{\partial n^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$a_{11} = \frac{2Q(K + nK_1)\lambda}{Q^4} = \frac{2(34)(8000 + 3(250))50}{34^4} = 22,26$$

$$a_{22} = \frac{2n}{n^4}(h_2 - h) \left[\frac{Q}{2} - \frac{Q\lambda}{2P} - \frac{QE[x]\lambda}{2P_1} \right] = \frac{2(3)}{3^4}(800 - 200) \left[\frac{34}{2} - \frac{34(50)}{2(144)} - \frac{34(0,15)50}{2(24)} \right] = 257,19$$

$$a_{12} = a_{21} = -\frac{K_1\lambda}{Q^2} - \frac{1}{n^2}(h_2 - h) \left[\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2P} - \frac{E[x]\lambda}{2P_1} \right] = -\frac{250(50)}{34^2} - \frac{1}{3^2}(800 - 200) \left[\frac{1}{2} - \frac{50}{2(144)} - \frac{(0,15)50}{2(24)} \right] = -22,15$$

$$|H| = (22,26 \times 257,19) - (-22,15 \times -22,15)$$

$$|H| = 5725,04 - 490,77 = 5234,42$$

Dari perhitungan elemen diagonal (a_{11} dan a_{12}) memiliki nilai positif, begitu juga dengan nilai determinan Hessian memiliki nilai positif, maka dapat disimpulkan nilai Q, n , dan $E[TCU(Q, n)]$ yang diperoleh merupakan solusi global yang optimal.

Untuk memenuhi permintaan PT HENKAD sebesar 50 unit dan mengoptimalkan biaya produksi di tahun 2012, maka frekuensi pengiriman PT. PINDAD kepada PT. HENKAD adalah 3 kali persiklus produksi dalam jangka waktu satu minggu.

Dalam satu siklus, pesan ulang produksi atau penambahan persediaan optimal adalah 34 unit. Produksi atau penambahan ini terjadi selama selang waktu t_1 dan t_2 yang masing masing 11 minggu dan 5 minggu, dengan tingkat pertambahan persediaan sebesar 3 unit perminggu untuk produk jadi dan produk cacat diperbaiki adalah 2 unit perminggu.

Biaya total persediaan minimum yang harus dikeluarkan PT. PINDAD dalam memproduksi TOP SPURS GEAR BOX adalah Rp.61.679.510,00. Berdasarkan uji konveksitas menggunakan matriks hessian diperoleh hasil $5234,42 > 0$ yang artinya fungsi $E[TCU(Q, n)]$ merupakan fungsi konveks sehingga mempunyai nilai minimum.

Kesimpulan

Model yang dikembangkan dalam penelitian ini adalah model penentuan ukuran lot dan pengiriman dengan mempertimbangkan adanya kondisi *Rework* (pengerjaan ulang) karena saat produksi regular berlangsung terdapat *defective item* (item cacat), dan model matematis tersebut ditunjukkan dipersamaan (3.30) dan (3.32). Dimana frekuensi pengiriman $n = 3$, dan ukuran lot produksi $Q = 34$.

Berdasarkan total biaya persediaan $E[TCU(Q, n)]$ diperoleh biaya total minimum yaitu sebesar Rp.61.679.510,00. Berdasarkan uji konveksitas menggunakan matriks hessian diperoleh hasil $5234,42 > 0$, yaitu, maka dapat disimpulkan nilai n, Q yang diperoleh merupakan solusi optimal.

Referensi

- [1] Assauri, S. 1993, *Manajemen produksi dan Operasi*, Yogyakarta : Lembaga Penerbit FE-BPFE.
- [2] Bahagia, S.N. 2006, *Sistem Inventori*. Bandung : Penerbit ITB.
- [3] Chiu YSP, Lin CAK, Chang HH, Chiu V (2010b). "Mathematical modeling for determining economic bath size and optimal number of deliveries for model EPQ with Quality assurance". *Math. Comp. Model. Dyn.Sys.*, 16(4):373-388.
- [4] Irwansyah, D.E. 2010. Penerapan Material Requirements Planning (MRP) dalam Perencanaan Persediaan Bahan Baku Jamu Sehat Perkasa pada PT Nyonya Meneer Semarang. Jurusan Manajemen Universitas Diponegoro Semarang. Tidak Diterbitkan.
- [5] Luknanto, D. 2003, *Metode Optimasi Analitis*. Yogyakarta : UGM.
- [6] Nurhayati, R. 2012. *Penerapan Model EPQ (Economic Production Quantity) dengan Kendalan Rework Menggunakan Matriks Hessian (Studi Kasus di PT Pindad Persero)*. Jurusan Matematika UIN Bandung. Tidak diterbitkan.
- [7] Opan, P. 2010, "Evaluasi Kebijakan Strategi Bisnis Menggunakan Model JELS Dengan Permintaan Probabilistik", Universitas Diponegoro, Semarang.
- [8] Riggs, J.B. 1988, "An Introduction to Numerical Methods for Chemical Engineers", Texas : Texas Tech University Press, Chapter 6.
- [9] Ristono, A., 2009, *Manajemen Persediaan*, Yogyakarta : Graha Ilmu.
- [10] Siswanto. 2007. *Operations Research, Jilid Dua*, Jakarta: Erlangga.