

# Estimasi Parameter pada Fungsi Produksi Cobb-Douglas Non-Linier Menggunakan Metode *Least Square*

Ahfazh Fauzy Nurunnajib<sup>1,a)</sup>, Elis Ratna Wulan<sup>2,b)</sup>, Asep Solih Awalluddin<sup>3,c)</sup>

<sup>1,2,3</sup>Jurusan Matematika – FST, UIN Sunan Gunung Djati Bandung

<sup>a)</sup>ahfazh@gmail.com, <sup>b)</sup>elisrwulan@yahoo.com, <sup>c)</sup>aasolih@gmail.com

## Abstrak

Industri Manufaktur merupakan salah satu sektor yang memiliki pengaruh terhadap perekonomian nasional. Membaiknya situasi ekonomi akan diikuti perbaikan sektor manufaktur, begitupula sebaliknya. Oleh karena itu, suatu industri perlu memilih kombinasi yang optimal dari input yang digunakan, yaitu kombinasi yang memungkinkan untuk menghasilkan tingkat output yang diinginkan. Model yang digunakan adalah fungsi produksi Cobb-Douglas. Fungsi produksi Cobb-Douglas adalah salah satu fungsi produksi yang menunjukkan hubungan antara tingkat output dan tingkat (kombinasi) input yang digunakan. Metode estimasi yang digunakan adalah *least square estimation* dengan penyelesaian menggunakan iterasi Newton Raphson. Fungsi produksi Cobb-Douglas ini diaplikasikan pada lima industri manufaktur terpilih di Sumatera Barat. Dari hasil penelitian diperoleh *return to scale* dari industri karet dan barang dari plastik adalah 0,8424 dan *return to scale* dari industri makanan dan minuman adalah 0,8496 yang mana kedua industri tersebut masing-masing menghasilkan RTS < 1. Sedangkan *return to scale* dari industri penerbitan dan percetakan adalah 1,0460, *return to scale* dari industri tekstil adalah 1,0018, dan *return to scale* dari industri galian bukan logam adalah 1,3384. Dari ketiga industri tersebut masing-masing menghasilkan RTS > 1.

Kata kunci: *Estimasi, Least Square, Fungsi Produksi Cobb-Douglas, Metode Newton Raphson, Industri Manufaktur.*

## Pendahuluan

Secara umum, kinerja sektor industri manufaktur tidak terlepas dari kinerja perekonomian secara keseluruhan. Keterkaitan antara fluktuasi perekonomian secara keseluruhan dan kinerja sektor manufaktur jelas terlihat di Indonesia. Akselerasi pertumbuhan di masa pemerintahan orde baru pada periode dekade 1970 hingga pertengahan 1980. Sektor manufaktur tumbuh hingga mencapai lebih dari 14% per tahun secara rata-rata. Sebaliknya, perlambatan pertumbuhan ekonomi nasional yang terjadi pada pertengahan 1980 yang diakibatkan oleh kejatuhan harga minyak internasional, membuat perlambatan juga terjadi di sektor manufaktur[5].

Berbagai kebijakan reformasi dan liberalisasi ekonomi yang dicanangkan oleh pemerintah saat itu mampu menggenjot sektor manufaktur untuk tetap tumbuh dengan perkasa sampai pertengahan 1990, dengan mengandalkan ekspor dan investasi asing. Pertumbuhan tersebut berlangsung hingga terjadi krisis ekonomi pada Juli 1997. Krisis ini menandai dimulainya suatu periode yang menyakitkan bagi perekonomian Indonesia. Pertumbuhan ekonomi tercatat ambruk hingga lebih dari 14% selama 1997-1998[5].

Setiap industri mencoba untuk memproduksi barang dengan hasil yang optimal. Untuk memperoleh hal itu, diperlukan keputusan tentang apa yang akan diproduksi, berapa banyak yang akan diproduksi dan bagaimana proses produksi. Dengan demikian, suatu industri perlu memilih kombinasi yang optimal dari input yang digunakan, yaitu kombinasi input yang memungkinkan untuk menghasilkan tingkat output yang diinginkan. Model yang digunakan adalah fungsi produksi Cobb-Douglas. Estimasi parameter dari

fungsi produksi Cobb-Douglas diperoleh dengan pendekatan *least square estimation* dengan prosedur iterasi Newton-Raphson.

## Teori Estimasi

Statistika inferensi adalah metode statistika yang digunakan untuk menarik inferensi atau rampatan atau kesimpulan dari suatu populasi dengan informasi dari sampel yang diambil dari populasi tersebut. Dalam metode klasik, inferensi didasarkan sepenuhnya pada informasi yang diperoleh melalui sampel acak yang diambil dari populasi. Secara garis besar statistika inferensi dapat dibagi dua, yaitu penaksiran atau estimasi dan pengujian hipotesis[19].

Secara umum estimasi adalah dugaan atas sesuatu yang akan terjadi dalam kondisi tidak pasti. Estimasi adalah keseluruhan proses yang menggunakan sebuah estimator untuk menghasilkan sebuah estimasi dari suatu parameter. Data yang digunakan untuk melakukan estimasi parameter populasi adalah statistik sampel sebagai estimator [8].

### Estimasi *Least Square*

Hal yang diamati sebagai keluaran sistem bergantung pada dua persoalan, yaitu hubungan fungsional yang mengatur sistem tersebut (pola) dan unsur random (galat)[11]. Prosedur umum untuk menduga pola hubungan, baik kausal maupun deret berkala, adalah dengan mencocokkan suatu bentuk fungsional sedemikian rupa sehingga komponen galat dapat diminimumkan. Salah satu bentuk pendugaan ini adalah kuadrat terkecil. Pendekatan ini pertama kali dikembangkan oleh Gaus tahun 1980-an. Istilah kuadrat terkecil (*least square*) didasarkan atas kenyataan bahwa prosedur penaksiran ini berusaha meminimumkan jumlah kuadrat galatnya[11]. Diformulasikan sebagai berikut:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Persamaan diatas dengan mudah dapat dikenali sebagai rumus yang menghasilkan nilai tengah dari  $n$  bilangan dan rumus ini memberikan nilai yang meminimumkan jumlah kuadrat galat[11].

### Deret Taylor

Deret Taylor merupakan representasi fungsi matematika sebagai jumlahan tak hingga dari suku-suku yang nilainya dihitung dari turunan fungsi tersebut di suatu titik. Deret Taylor memberikan sebuah perumusan untuk meramalkan suatu harga fungsi pada  $x_{i+1}$  yang dinyatakan dalam harga fungsi itu dan turunannya di sekitar titik  $x_i$  [14].

Bentuk umum dari deret Taylor sebagai berikut:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}(x_{i+1} - x_i)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}(x_{i+1} - x_i)^n + R_n$$

Dalam prakteknya hanya beberapa suku pertama saja yang diperhitungkan sehingga hasilnya tidak tepat seperti pada penyelesaian analitik. Sehingga terdapat kesalahan (*error*) yang disebut dengan kesalahan pemotongan (*truncation error*,  $R_n$ ), yaitu:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x_{i+1} - x_i)^{n+1}$$

dimana  $n$  merupakan sisa dari aproksimasi orde ke- $n$  dan  $\xi$  merupakan nilai  $x$  yang terletak sembarang antara  $x_i$  dan  $x_{i+1}$ .

### Matriks Hessian

Sebuah matriks adalah susunan segiempat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks[9]. Matriks hessian dari suatu fungsi  $f(x)$  adalah matriks persegi turunan parsial kedua dari fungsi tersebut[20]. Dinyatakan sebagai:

$$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

### Fungsi Produksi

Fungsi produksi adalah fungsi yang menunjukkan hubungan fisik antara tingkat output dan tingkat (kombinasi) input yang digunakan[18]. Fungsi produksi menunjukkan jumlah output maksimum yang dapat diperoleh dari sekumpulan input tertentu[13]. Fungsi produksi dapat dirumuskan dalam bentuk:

$$Q = f(K, L, M, \dots)$$

dimana Q menunjukkan output suatu barang tertentu selama satu periode, K menunjukkan input modal selama periode tertentu, L menunjukkan input tenaga kerja, M menunjukkan bahan mentah yang digunakan, dan notasi titik menunjukkan kemungkinan variable-variabel lain yang mempengaruhi proses produksi.

### Fungsi Produksi Cobb Douglas

Fungsi Produksi Cobb – Douglas pertama kali diselidiki oleh CW. Cobb dan PH. Douglas dan dipublikasikan pada jurnal *American Economic Review* pada tahun 1928. Fungsi Cobb-Douglas adalah suatu fungsi atau persamaan yang melibatkan dua atau lebih variabel, dimana variabel yang satu disebut dengan variabel dependen dan yang lain disebut variabel independen[18].

Fungsi produksi Cobb-Douglas dengan *multiplicative error term* dirumuskan dengan :

$$Q_t = \beta_1 L_t^{\beta_2} K_t^{\beta_3} e_t$$

yang mana  $Q_t$  adalah output;  $L_t$  adalah input tenaga kerja;  $K_t$  adalah input modal;  $\beta_1$  adalah parameter teknologi;  $\beta_2$  adalah elastisitas input tenaga kerja;  $\beta_3$  adalah elastisitas input modal;  $e_t$  adalah *random error term*.

Fungsi Cobb-Douglas dengan *additive error term* dirumuskan dengan :

$$Q_t = \beta_1 L_t^{\beta_2} K_t^{\beta_3} + e_t$$

yang mana  $Q_t$  adalah output;  $L_t$  adalah input tenaga kerja;  $K_t$  adalah input modal;  $\beta_1$  adalah parameter teknologi;  $\beta_2$  adalah elastisitas input tenaga kerja;  $\beta_3$  adalah elastisitas input modal;  $e_t$  adalah *random error term*.

### Elastisitas Produksi

Elastisitas produksi ( $E$ ) didefinisikan persentase perubahan output dibagi dengan persentase perubahan input. Elastisitas produksi menunjukkan ratio perubahan relatif output yang dihasilkan terhadap perubahan relatif jumlah input yang digunakan[16].

Elastisitas output dari modal ( $E_K$ ) diukur melalui :

$$E_K = \frac{\% \Delta Q}{\% \Delta K} = \beta_3$$

dapat dipandang bahwa elastisitas output dari modal dapat diukur secara langsung melalui koefisien  $\beta_3$  dari fungsi produksi Cobb-Douglas.

Sedangkan elastisitas output dari tenaga kerja ( $E_L$ ) dapat diukur melalui:

$$E_L = \frac{\% \Delta Q}{\% \Delta L} = \beta_2$$

dapat dipandang bahwa elastisitas output dari tenaga kerja dapat diukur secara langsung melalui koefisien  $\beta_2$  dari fungsi produksi Cobb-Douglas.

### Return to Scale

Dengan fungsi produksi Cobb-Douglas dapat juga digunakan untuk menyelidiki hasil atas skala (*return to scale*), yaitu dengan mengkombinasikan satu atau dua input baik modal maupun tenaga kerja. *Return to scale* menunjukkan hubungan perubahan input secara bersama-sama (dalam persentase) terhadap perubahan output[16].

Misalkan penggunaan  $K_0$  dan  $L_0$  akan menghasilkan output  $Q_0$ , yaitu:

$$Q_0 = \beta_1 L_0^{\beta_2} K_0^{\beta_3}$$

Jika  $Q_1$  merupakan output yang dihasilkan oleh kombinasi input modal, maka diperoleh:

$$Q_1 = \beta_1 L_0^{\beta_2} (2K_0)^{\beta_3} = 2^{\beta_3} Q_0$$

Jika  $Q_2$  merupakan output yang dihasilkan oleh kombinasi input tenaga kerja, maka diperoleh:

$$Q_2 = \beta_1 (2L_0)^{\beta_2} K_0^{\beta_3} = 2^{\beta_2} Q_0$$

Jika  $Q_3$  merupakan output yang dihasilkan oleh kombinasi input modal dan tenaga kerja, maka diperoleh:

$$Q_3 = \beta_1 (2L_0)^{\beta_2} (2K_0)^{\beta_3} = 2^{\beta_2 + \beta_3} Q_0$$

sehingga dapat diketahui kombinasi elastisitas produksi yaitu jika  $\beta_2 + \beta_3 = 1$  maka fungsi tersebut akan menunjukkan skala dengan hasil konstan (*constant return to scale*), artinya kenaikan input akan diikuti dengan kenaikan output secara proporsional. Jika  $\beta_2 + \beta_3 < 1$  maka fungsi tersebut menunjukkan skala dengan hasil menurun (*decreasing returns to scale*), yang artinya persentase kenaikan output lebih kecil dari persentase penambahan inputnya. Jika  $\beta_2 + \beta_3 > 1$  menunjukkan skala dengan hasil meningkat (*increasing return to scale*), artinya persentase penambahan output lebih besar dari persentase penambahan inputnya.

Bagian ini juga dapat diberi judul Model atau Eksperimen. Dapat juga ditulis Teori dan Eksperimen sekaligus, bila diperlukan. Bagian ini dapat berisi ulasan teori yang digunakan dalam penelitian, model matematika, metode, dan desain eksperimen yang dilakukan.

Bagian ini juga dapat berisi kutipan dari suatu literatur yang dianggap penting untuk dibandingkan atau digunakan dalam bagian hasil dan diskusi. Setiap paragraf baru ditulis menjorok sejauh 0.75 cm, sedangkan paragraf lanjutan yang terpotong oleh tabel, persamaan, dan tabel tidak perlu ditulis menjorok. Keterangan tabel diletakkan di atas tabel, sedangkan keterangan gambar diletakkan di bawah tabel.

### Prosedur Estimasi

Pada model fungsi produksi dengan *multiplicative error term* dapat langsung ditransformasikan kedalam bentuk linier, sehingga penyelesaiannya dapat dilakukan dengan prosedur estimasi statistik linier. Pada model ini, koefisien regresinya menunjukkan elastisitas produksi dan hasil penjumlahan parameternya menunjukkan *return to scale*.

Berbeda dengan model fungsi produksi dengan *additive error term* yang mana model ini tidak dapat ditransformasikan kedalam bentuk linier, sehingga prosedur estimasi harus diselesaikan dengan teknik statistik non-linier.

### Metode Newton Raphson

Pendekatan yang digunakan dalam estimasi parameter non-linier adalah memfokuskan fungsi objektifnya yaitu dengan meminimumkan *sum of square* atau memaksimumkan *likelihood function*.

Selanjutnya pada tulisan ini digunakan proses estimasi dengan pendekatan *least square estimation* dengan menggunakan metode iterasi Newton Raphson.

Metode *Newton-Raphson* (NR) merupakan salah satu metode populer untuk menghampiri penyelesaian persamaan secara iteratif. Dalam metode ini  $g(\beta)$  diaproksimasikan dengan perluasan deret Taylor orde dua disekitar *initial value*  $\beta^{(t)}$  [12].

$$g(\beta^{(t+1)}) \approx g(\beta^{(t)}) + g'(\beta^{(t)})(\beta^{(t+1)} - \beta^{(t)}) + \frac{1}{2}g''(\beta^{(t)})(\beta^{(t+1)} - \beta^{(t)})^2$$

$$g(\beta^{(t+1)}) \approx g(\beta^{(t)}) + \mathbf{G}(\beta^{(t)})(\beta^{(t+1)} - \beta^{(t)}) + \frac{1}{2}\mathbf{H}(\beta^{(t)})(\beta^{(t+1)} - \beta^{(t)})^2$$

dimana  $\mathbf{G}(\beta^{(t)}) = \left[ \frac{\partial g}{\partial \beta_i} \right]_{\beta^{(t)}}$  adalah vektor gradien dan  $\mathbf{H}(\beta^{(t)}) = \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial \beta_i \partial \beta_k} \right]_{\beta^{(t)}}$  adalah matriks Hessian, yang

mana matriks Hessian adalah *positive definite*.

Turunan pertama diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{\partial g(\beta)}{\partial \beta} = 0 + \mathbf{G}(\beta^{(t)}) + \mathbf{H}(\beta^{(t)})(\beta^{(t+1)} - \beta^{(t)}) = 0$$

Selanjutnya diperoleh langkah untuk menghitung  $\beta^{(t+1)}$ , sehingga diperoleh persamaan umum iterasi Newton Raphson sebagai berikut:

$$\beta^{(t+1)} = \beta^{(t)} - [\mathbf{H}(\beta^{(t)})]^{-1} \mathbf{G}(\beta^{(t)})$$

Prosedur iterasi berlanjut sampai konvergensi tercapai. Jika iterasi sudah konvergen, yaitu  $\beta^{(t+1)} = \beta^{(t)}$  maka dari persamaan (3.16) dapat disimpulkan bahwa  $\mathbf{G}(\beta^{(t)}) = 0$ , dimana memenuhi persyaratan *first order (necessary condition)* pada persamaan (3.15). Konvergensi mendekati maksimum apabila:

$$|\beta_i^{(t+1)} - \hat{\beta}_i| \leq c |\beta_i^{(t)} - \hat{\beta}_i|^2, \quad c \geq 0$$

ketika  $\beta_i^{(t)}$  mendekati  $\hat{\beta}_i$  untuk setiap  $i$ . Sehingga diperoleh estimasi  $\hat{\beta}_i$  dari metode Newton-Raphson.

Estimasi parameter pada fungsi produksi Cobb-Douglas dengan *additive error term* dilakukan dengan meminimumkan jumlah kuadrat galatnya, selanjutnya dengan menjumlahkan nilai-nilai (galat kuadrat) dapat diperoleh:

$$S(\beta) = \sum_{t=1}^n e_t^2 = \sum_{t=1}^n (Q_t - \beta_1 L_t^{\beta_2} K_t^{\beta_3})^2$$

Dengan meminimumkan jumlah kuadrat galatnya dan disubstitusikan kedalam persamaan umum Newton Raphson diperoleh :

$$\beta^{(t+1)} = \beta^{(t)} - [\mathbf{H}(\beta^{(t)})]^{-1} \mathbf{G}(\beta^{(t)})$$

$$\beta^{(t+1)} = \beta^{(t)} - \left[ \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial \beta_i \partial \beta_k} \right]_{\beta^{(t)}} \right]^{-1} \left[ \frac{\partial g}{\partial \beta_i} \right]_{\beta^{(t)}}$$

$$\beta^{(t+1)} = \beta^{(t)} - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 S(\beta)}{\partial \beta_1^2} & \frac{\partial^2 S(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} & \frac{\partial^2 S(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \beta_3} \\ \frac{\partial^2 S(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} & \frac{\partial^2 S(\beta)}{\partial \beta_2^2} & \frac{\partial^2 S(\beta)}{\partial \beta_2 \partial \beta_3} \\ \frac{\partial^2 S(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \beta_3} & \frac{\partial^2 S(\beta)}{\partial \beta_2 \partial \beta_3} & \frac{\partial^2 S(\beta)}{\partial \beta_3^2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta_1} \\ \frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta_2} \\ \frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta_3} \end{bmatrix}$$

## Hasil dan Diskusi

Data yang digunakan pada penelitian ini adalah data sekunder yang diambil dari Badan Pusat Statistik tentang industri manufaktur di Sumatra Barat. Industri yang diteliti sebanyak lima industri, diantaranya:

industri karet dan barang dari plastik, industri percetakan dan penerbitan, industri tekstil, industri makanan dan minuman, dan industri barang galian bukan logam. Data yang digunakan adalah data dari tahun 2001 sampai 2010.

Tabel 1. Hasil estimasi pada industri karet dan barang dari plastik

Initial Value			Optimal Value			Jumlah Iterasi
$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	
0,55	0,55	0,55	4,0357	0,0609	0,7815	41
0,60	0,60	0,60	4,0357	0,0609	0,7815	12
0,65	0,65	0,65	4,0357	0,0609	0,7815	42
0,70	0,70	0,70	4,0357	0,0609	0,7815	39
0,75	0,75	0,75	4,0357	0,0609	0,7815	65

Tabel 2. Hasil estimasi pada industri penerbitan dan percetakan

Initial Value			Optimal Value			Jumlah Iterasi
$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	
1	1	1	1,3186	0,0863	0,9597	50
0,9	0,9	0,9	1,3186	0,0863	0,9597	48
0,7	0,7	0,7	1,3186	0,0863	0,9597	33
0,5	0,5	0,5	1,3186	0,0863	0,9597	52

Tabel 3. Hasil estimasi pada industri tekstil

Initial Value			Optimal Value			Jumlah Iterasi
$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	
1	1	1	1,5132	0,0715	0,9303	20
0,6	0,6	0,6	1,5132	0,0715	0,9303	35
0,4	0,4	0,4	1,5132	0,0715	0,9303	18
0,2	0,2	0,2	1,5132	0,0715	0,9303	27

Tabel 4. Hasil estimasi pada industri makanan dan minuman

Initial Value			Optimal Value			Jumlah Iterasi
$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	
1	1	1	2,8305	0,2752	0,5744	17
0,8	0,8	0,8	2,8305	0,2752	0,5744	7
0,5	0,5	0,5	2,8305	0,2752	0,5744	21
0,3	0,3	0,3	2,8305	0,2752	0,5744	25

Tabel 5. Hasil estimasi pada industri galian bukan logam

Initial Value			Optimal Value			Jumlah Iterasi
$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	
1	1	1	0,1537	0,7430	0,5954	29
0,7	0,7	0,7	0,1537	0,7430	0,5954	16
0,5	0,5	0,5	0,1537	0,7430	0,5954	24
0,2	0,2	0,2	0,1537	0,7430	0,5954	13

Berdasarkan hasil estimasi pada tabel 1 sampai 5, dengan pengambilan nilai awal yang berbeda dapat diperoleh nilai optimum yang sama. Apabila dilakukan perubahan pada nilai awal parameternya, mengakibatkan perubahan pada jumlah iterasinya.

**Elastisitas**

Dari hasil estimasi yang diperoleh, dapat dijelaskan tentang elastisitas yang menunjukkan rasio perubahan relatif output yang dihasilkan terhadap perubahan relatif jumlah input yang digunakan.

Tabel 6. Elastisitas dari masing-masing industri

No	Nama Industri	Elastisitas Tenaga Kerja ( $\hat{\beta}_2$ )	Elastisitas Kapital ( $\hat{\beta}_3$ )
1	Industri Karet dan Barang dari Plastik	0,0609	0,7815
2	Industri Penerbitan dan Percetakan	0,0863	0,9597
3	Industri Tekstil	0,0715	0,9303
4	Industri Makanan dan Minuman	0,2752	0,5744
5	Industri Galian Bukan Logam	0,7430	0,5954

Berdasarkan tabel 6, pada industri karet dan barang dari plastik, elastisitas dari input tenaga kerja adalah 0,0609 yang berarti bahwa sekitar 6% pengaruh perubahan jumlah input tenaga kerja terhadap perubahan hasil output industri. Sedangkan elastisitas dari input kapital adalah 0,7815 yang berarti bahwa sekitar 78% pengaruh perubahan jumlah input kapital terhadap perubahan hasil output industri.

**Return to Scale**

Dari hasil estimasi yang telah dilakukan, diperoleh nilai *return to scale* (RTS) dari masing-masing industri yang menunjukkan hubungan perubahan input secara bersama-sama terhadap perubahan output.

Tabel 7. *Return to scale* dari masing-masing industri

No	Nama Industri	Elastisitas Tenaga Kerja ( $\hat{\beta}_2$ )	Elastisitas Kapital ( $\hat{\beta}_3$ )	<i>Return to scale</i> ( $\hat{\beta}_2$ ) + ( $\hat{\beta}_3$ )
1	Industri Karet dan Barang dari Plastik	0,0609	0,7815	0,8424
2	Industri Penerbitan dan Percetakan	0,0863	0,9597	1,0460
3	Industri Tekstil	0,0715	0,9303	1,0018
4	Industri Makanan dan Minuman	0,2752	0,5744	0,8496
5	Industri Galian Bukan Logam	0,7430	0,5954	1,3384

Pada tabel 4.12, *return to scale* dari industri karet dan barang dari plastik adalah 0,8424 dan *return to scale* dari industri makanan dan minuman adalah 0,8496 yang mana kedua industri tersebut menghasilkan RTS < 1, hal tersebut menunjukkan *decreasing returns to scale* yang berarti bahwa persentase kenaikan output industri lebih kecil dari persentase penambahan input masing-masing industri.

Sedangkan *return to scale* dari industri penerbitan dan percetakan adalah 1,0460, *return to scale* dari industri tekstil adalah 1,0018, dan *return to scale* dari industri galian bukan logam adalah 1,3384. Dari ketiga industri tersebut masing-masing menghasilkan RTS > 1, hal tersebut menunjukkan *increasing returns to scale* yang berarti bahwa persentase kenaikan output industri lebih besar dari persentase penambahan input dari masing-masing industri.

**Kesimpulan**

Model estimasi parameter fungsi produksi Cobb-Douglas dari masing-masing industri manufaktur disajikan dalam tabel berikut:

Tabel 7. Model estimasi parameter fungsi produksi Cobb-Douglas

No	Nama Industri	Model Estimasi Cobb-Douglas
1	Industri Karet dan Barang dari Plastik	$\hat{Q} = 4,0357L^{0,0609}K^{0,7815}$
2	Industri Penerbitan dan Percetakan	$\hat{Q} = 1,3185L^{0,0863}K^{0,9597}$
3	Industri Tekstil	$\hat{Q} = 1,5132L^{0,0715}K^{0,9303}$
4	Industri Makanan dan Minuman	$\hat{Q} = 2,8305L^{0,2752}K^{0,5744}$
5	Industri Galian Bukan Logam	$\hat{Q} = 0,1537L^{0,7430}K^{0,5954}$

Model estimasi pada tabel 7, dapat digunakan oleh para pelaku industri terkait untuk memilih kombinasi yang optimal dari input yang digunakan, yaitu kombinasi yang memungkinkan untuk menghasilkan tingkat output yang diinginkan.

**Referensi**

- [1] Aziz, Abdul, *Buku Ajar Ekonometrika : Teori dan Analisis Matematis*, Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Malang, 2007.
- [2] BPS, *Konsep Industri*, Statistik Indonesia.  
[http://www.bps.go.id/menutab.php?tabel=1&kat=2&id\\_subyek=09](http://www.bps.go.id/menutab.php?tabel=1&kat=2&id_subyek=09), [diakses 5 Juni 2013]
- [3] BPS Sumatera Barat, *Industri Manufaktur Besar dan Sedang Menurut Sub Sektor*, 2001 – 2010.  
<http://sumbar.bps.go.id/web/index.php/subyek/industri>, [diakses 1 Juli 2013]
- [4] CW Cobb, dan PH Douglas, "A Theory of Production", *American Economic Review*. 139 – 165, 8(1928).
- [5] Direktorat Evaluasi Kinerja Pembangunan Sektorial Kementerian PPN, *Perubahan Produktivitas Industri Manufaktur Indonesia dan Faktor-Faktor yang Mempengaruhinya : Analisis Panel Data 2004-2009*, Bappenas, Tahun Anggaran 2010.
- [6] E. Khater, A Cobb – Douglas Function Based Index for Human Development in Egypt, *International Journal Contemporer Math Science*, Vol. 7, No. 12, 591 – 598, 2012.
- [7] Gaspersz, Vincent, *Ekonomi Manajerial Pembuatan Keputusan Bisnis*, PT. Gramedia Pustaka Utama, Jakarta, 1986.
- [8] Harinaldi, *Prinsip Statistik Untuk Teknik dan Sains*, Erlangga, Jakarta, 2005.
- [9] H, Anton, *Aljabar Linier Elementer (edisi kelima)*, Terjemahan oleh Pantur Silaban & I. Nyoman Susila, Erlangga, Jakarta, 1987.
- [10] Judge, George G., W.E Griffiths, R.C. Hill, H. Lukepohl, and T.C. Lee, *The Theory and Practice of Econometrics*, New York, Wiley, 1980.
- [11] Makridakis, Spyros, SC Wheelwright, VE McGee, *Metode dan Aplikasi Peramalan*, Binarupa Aksara Publisher, Jilid Satu, Edisi Revisi, Tangerang, 1999.



- [12] M. Hossain, A. Kumar Majumder, T. Basak, An Application of Non-Linear Cobb-Douglas Production Function to Selected Manufacturing Industries in Bangladesh, *Open Journal of Statistics*, 2, 460-468, 2012.
- [13] Nicholson, Walter, *Mikroekonomi Intermediate dan Penerapannya*, Edisi 3, terjemahan Danny Hutabarat, Penerbit Erlangga, 1992.
- [14] Raymon P. Canale, Steven C. Chapra, *Metode Numerik Untuk Teknik. Penerapan pada Komputer Pribadi*, Penerbit Universitas Indonesia, Jakarta, 2007.
- [15] Subaris Heru. *Aplikasi Statistika*, Media Pressindo, Yogyakarta, 2005.
- [16] Sugiarto, T. Herlambang, Brastoro, R. Sudjana, S. Kelana, *Ekonomi Mikro : Sebuah Kajian Komprehensif*, Penerbit PT Gramedia Pustaka Utama, Jakarta, 2000.
- [17] Sugiyono, *Statistika untuk Penelitian*, Penerbit Alfabeta, Bandung, 2009.
- [18] Sumarsono, Sony, *Ekonomi Mikro*, Penerbit Graha Ilmu, 2006.
- [19] Walpole E. Ronald, Myers H Raymond, *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuan*, edisi ke-4, Penerbit ITB Bandung, 1995.
- [20] Matlab, *Hessian Matrix*, R2013a.  
<http://www.mathworks.com/help/symbolic/hessian.html>, [diakses 10 Juli 2013]

