Pelabelan *Super Graceful* pada Graf *Caterpillar*

Nisa Nur Arafah[1, a)] , Rismawati Ramdani[2, b)], dan Arief Fatchul Huda[3, c)]

[1, 2, 3]*Juruan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sunan Gunung Djati*
Jl. A H Nasution No. 105 Bandung

[a)]*nisa.arafah@gmail.com*
[b)]*rismawatiramdani@yahoo.com*
[b)]*afhuda@gmail.com*

Abstrak

Misalkan G merupakan suatugraf dengan banyaknya titik $p$dan banyaknya sisi q. Pelabelan *super graceful* adalah pemetaan fungsi satu-satu pada $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2, \dots , p+q\}$sehingga $f(uv) = |f(u) - f(v)|$ berbeda untuk setiap sisi $uv \in E(G)$. Sebuah graf G disebut graf *super graceful* jika graf tersebut dapat dilabeli menurut definisi pelabelan *super graceful.* Graf *caterpillar* adalah graf yang jika semua titik pendannya dihilangkan akan menghasilkan lintasan. Pada makalah ini akan ditunjukkan bahwa graf *caterpillar* Cp_n dengan kepala dan ekor yang mempunyai *n* badan dan 2 kaki pada tiap badan, graf *caterpillar* Cp_n tanpa kepala dan ekor yang mempunyai *n* badan dan 2 kaki pada tiap badan,dan graf *caterpillar* $Cp_{m,n}$tanpa kepala dan ekor yang mempunyai n badan dan m kaki pada tiap badan merupakan graf *super graceful*.

Kata kunci : Pelabelan *Super Graceful*, Graf *Caterpillar*.

Pendahuluan

Pelabelan merupakan pemetaan yang memetakan himpunan titik atau himpunan sisi ke suatu bilangan yang disebut label. Berdasarkan unsur yang dilabeli, pelabelan dibagi menjadi tiga jenis, yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Pelabelan titik adalah pelabelan dengan domain himpunan titik, pelabelan sisi adalah pelabelan dengan domain himpunan sisi, dan pelabelan total adalah pelabelan dengan domain gabungan antara himpunan titik dan himpunan sisi.Terdapat cukup banyak jenis pelabelan graf yang telah dikaji, antara lain pelabelan *graceful,* pelabelan harmoni, pelabelan ajaib, pelabelan anti ajaib, pelabelan prima, dan pelabelan *k-graceful.*pelabelan-pelabelan tersebut telah dipelajari lebih dari 1000 makalah. Pelabelan graf juga telah diaplikasikan pada beberapa bidang lainnya, diantaranya teori koding, kristalografisinar X, radar, astronomi, desain sirkuit, sistem jaringan komunikasi, dan penyimpanan data komputer.

Salah satu jenispelabelan graf yang banyakdikaji yaitu pelabelan *graceful*.Pelabelan*graceful*pertama kali diperkenalkanolehRosa [1] pada tahun 1967 Pelabelan inikemudiandikembangkan dan menghasilkan jenis pelabelan baru, yaitu pelabelan *supergraceful*. Penelitianmengenaipelabelan*super graceful* diantaradilakukanolehM.A. Perumal dkk [7] (2011), padamakalahnya yang berjudul *super graceful labeling for some special graphs*. Jenis graf yang telah dikaji diantaranya, graf $P_{n-1}(1,2, \dots , n)$, graf pohon kelapa, graf bipartit lengkap $K_{m,n}$, graf *superstar*$S_{m,n}$, dan graf $B(m, n, k)$.

Misalkan G adalah suatu graf dengan banyaknya titik p dan banyaknya sisi q. Pelabelan *super graceful* pada G adalah fungsi satu-satu pada $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2, \dots , p+q\}$ sehingga $f(uv) = |f(u) - f(v)|$ berbeda untuk setiap sisi $uv \in E(G)$. Sebuah graf G disebut graf *supergraceful* jika graf tersebut dapat dilabeli menurut definisi pelabelan *supergraceful.*[7]

Pada makalah ini, akan dikonstruksi suatu pelabelan *super graceful* pada beberapa jenis graf *caterpillar*, yaitu graf graf *caterpillar* Cp_ntanpa kepala dan ekor yang mempunyai *n* badan dan 2 kaki pada tiap badan, graf *caterpillar* Cp_ndengan kepala dan ekor yang mempunyai *n* badan dan 2 kaki pada tiap badan,dan graf *caterpillar* $Cp_{m,n}$tanpa kepala dan ekor yang mempunyai n badan dan m kaki pada tiap badan merupakan graf *super graceful*.[2]

Teori Dasar

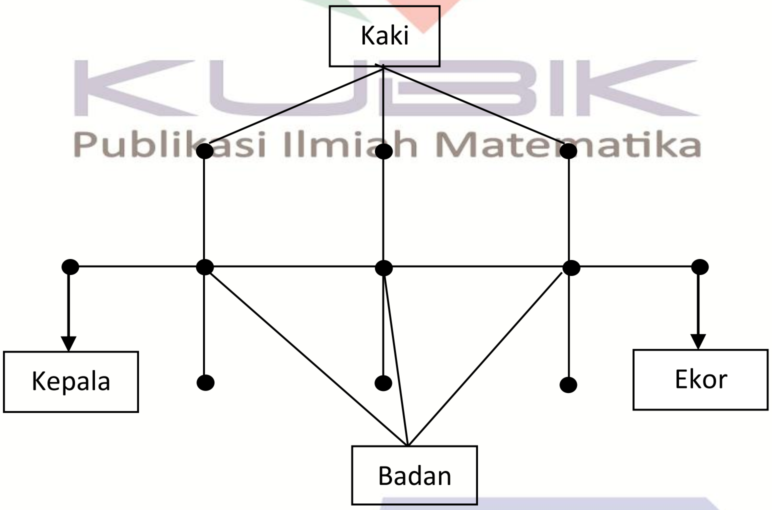
Definisi 2.1 Suatu Graf Gadalah pasangan dua himpunan$V(G)$dan$E(G)$, dinotasikan denga$G = (V(G), E(G))$,dimana$V(G)$adalah himpunan yang tak kosong dari titik-titikdan$E(G)$adalah himpunan sisiyang menghubungkan dua titik di G. Jika$e$menghubungkan titik$u$dengan titik v, maka $e$dapat ditulis sebagai $e = (uv)$.[6]Banyaknya titik pada graf Gdisebut orde dari graf$G$, sedangkan banyaknya sisi pada Gdisebut ukuran dari G.Bila titik u dan v terhubung oleh suatu sisi e di $G\big(V(G), E(G)\big)$, maka titik u dan v dikatakan *bertetangga* di $G\big(V(G), E(G)\big)$, dan jika ada sisi $e = uv$, maka sisi$e$disebut *terkait* pada titik$v$.Titik u dan v disebut *titik ujung*dari e.[6] Banyaknya sisi yang menempel pada suatu titik $v \in V(G)$ disebut sebagai *derajat titik* v, dinotasikan dengan $d(v)$. *Derajat terkecil* dari suatu graf G dinotasikan dengan $\delta(G)$, sedangkan *derajat terbesar* dari graf G dinotasikan dengan $\Delta(G)$.[5] Suatu graf disebut *sederhana* jika tidak memuat *loop* dan sisi ganda.*Titikpendan*adalahtitikberberadat 1. [4]

Jalan (*walk*) adalah suatuderet$W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots v_{k-1} e_k v_k$ yang berselang seling antara titik dan sisi sedemikian sehingga $e_i = v_{i-1} v_i$. *Lintasan*adalahsuatujalandimana$v_i \neq v_j$ untuk setiap $0 \leq i \leq k$[4].

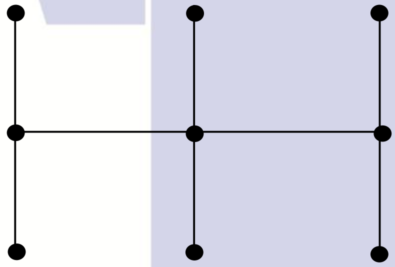
Graf *caterpillar* adalah graf yang jika semua titik ujungnya dihilangkan akan menghasilkan lintasan[2].

Misalkan G terhubung,G memuat tepat satu titik ujung yang terhubung langsung dengan badan bagian depan dan belakang maka masing-masing bagian disebut dengan kepala dan ekor, sedangkan yang disebut badan yaitu jika berderajat lebih dari *2*, dan disebut kaki jika memuat tepat satu titik ujung yang terkait langsung dengan badan bagian kanan dan kiri.**[2]**

Sebagai ilustrasi, berikut ini diberikan contoh graf *caterpillar* dengan kepala dan ekor dan contoh graf caterpillar tanpa kepala dan ekor.



Gambar 1 Graf *Caterpillar* dengan kepala dan ekor yang mempunyai 3 badan dan 6 kaki



Gambar 2 Graf *Caterpillar* tanpa kepala dan ekor yang mempunyai 3 badan dan 6 kaki

Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini akan dibuktikan bahwa graf *caterpillar* Cp_ndengan kepala dan ekor yang mempunyai *n* badan dan 2 kaki pada tiap badan, graf *caterpillar* Cp_ntanpa kepala dan ekor yang mempunyai *n* badan dan 2 kaki pada tiap badan,dan graf *caterpillar* $Cp_{m,n}$ tanpa kepala dan ekor yang mempunyai n badan dan m kaki pada tiap badan merupakan graf *super graceful*.

1. Pelabelan S*uper Graceful* pada Graf *Caterpillar* Cp_n dengan Kepala dan Ekor

Teorema 3.1 Graf *caterpillar* Cp_n, untuk $n \geq 2$, dengan kepala dan ekor yang mempunyai n badan dan $2n$ kaki merupakan graf *super graceful.*

Bukti.

Misalkan $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ adalah himpunan titik pada graf *caterpillar* dimana $V_1 = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}\}$, $V_2 = \{v_1', v_2', v_3', \dots, v_n'\}$ dan $V_3 = \{v_1'', v_2'', v_3'', \dots, v_n''\}$, Titik v_0 adalah kepala dan titik v_{n+1} adalah ekor.

Definisikan suatupelabelan $f : V(Cp_n) \cup E(Cp_n) \to \{1,2, \dots, 3(2n+1)\}$pada graf *caterpillar* Cp_n dengan kepala dan ekor dengan aturan yaitu sebagai berikut:

$$f(v_i) \quad = \begin{cases} 3(2n-i+2) & \text{untuk} \quad 1 \leq i \leq n+1 \text{ dan} i \equiv 1(mod\ 2) \\ i+1 & \text{untuk} \quad 0 \leq i \leq n+1 \text{ dan} i \equiv 0(mod\ 2) \end{cases}$$

Untuk $0 \leq i \leq n+1$ dan$i \equiv 0(mod\ 2)$ bukan i+1 tapi **3i+1**

$$f(v_i') \quad = \begin{cases} 3i & \text{untuk} \quad 1 \leq i \leq n \text{ dan} i \equiv 1(mod\ 2) \\ 3(2n-i)+5 & \text{untuk} \quad 1 \leq i \leq n \text{dan} i \equiv 0(mod\ 2) \end{cases}$$

$$f(v_i'') \quad = \begin{cases} 3(i+1)-1 & \text{untuk} \quad 1 \leq i \leq n \text{dan} i \equiv 1(mod\ 2) \\ 3(2n-i)+7 & \text{untuk} \quad 1 \leq i \leq n \text{dan } i \equiv 0(mod\ 2) \end{cases}$$

Daripelabelan di atas, dapat dilihat bahwa label pada setiap titik berbeda.

1. Untuk n ganjil

   a. Untuk $i = 1,3,5, \dots, n+1$, label titik-titik v_i berturut-turut adalah $3(2n+1), 3(2n-1), 3(2n-3), \dots, 3(n+2)$, sedangkan untuk $i = 2,4,6 \dots, n$, label titik-titikv_i berturut-turut adalah $\{1,7,13, \dots, 3n+4\}$.

   Bukan 2,4,6,$\dots n$, tapi dimulai dari $i = 0,2,4, \dots, n+1$.

   Saya misalkan:

   Diketahui $n = 3$ atau n ganjil

   Pelabelan pada graf ini, untuk $n = 3$ maka pelabelan terbesar yaitu $3(2n+1) = 21$

   Untuk mencari label himpunan $V_1 = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}\}$ atau $f(v_i)$, disini ada dua rumus untuk *i* genap dan *i* ganjil.

   - Untuk i ganjil dengan rumus: $3(2n-i+2)$, untuk setiap $i = 1,3$ atau v_1 dan v_3, maka himpunan label diperoleh yaitu: $\{21,15\}$ atau dengan hasil pembuktian himpunan label yaitu, $\{3(2n+1), 3(2n-1), 3(2n-3), \dots, \boldsymbol{3(n+2)}\}$, Dan jika n genap maka himpunan labelnya yaitu, $\{3(2n+1), 3(2n-1), 3(2n-3), \dots, \mathbf{3(n+1)}\}$.

- Untuk i genap dengan rumus: $3i+1$ bukan $i+1$, untuk setiap $i = 0{,}2{,}4$ atau v_0, v_2, dan v_4, maka himpunan label diperoleh yaitu: $\{1{,}7{,}13\}$ atau dengan hasil pembuktian himpunan label yaitu, $\{1{,}7{,}13, \dots, \mathbf{3n+4}\}$,

  Dan jika n genap maka himpunan labelnya yaitu, $\{1{,}7{,}13, \dots, \mathbf{3n+1}\}$.

  Sehingga dipastikan himpunan label untuk i ganjil dan i genap akan berbeda !

b. Untuk $i = 1{,}3{,}5, \dots, n$, label titik-titik v_i' berturut-turut adalah $\{3{,}9{,}15, \dots, 3n\}$, sedangkan untuk $i = 2{,}4{,}6, \dots, n$, label titik-titik v_i' berturut-turut adalah $\{3(2n-2)+5, 3(2n-4)+5, 3(2n-6)+5, \dots, 3n+8\}$.

c. Untuk $i = 1{,}3{,}5, \dots, n$, label titik-titik v_i'' berturut-turut adalah $\{5{,}11{,}17, \dots, 3n+2\}$, sedangkan untuk $i = 2{,}4{,}6, \dots, n$, label titik-titik v_i'' berturut-turut adalah $\{6n+1, 6n-5, 6n-11, \dots, 3n+10\}$.

2. Untuk n genap
   a. Untuk $i = 1{,}3{,}5, \dots, n+1$, labeltitik-titik v_i berturut-turut adalah $\{3(2n+1), 3(2n-1), 3(2n-3), \dots, 3(n+1)\}$ sedangkan untuk $i = 0{,}2{,}4{,}6 \dots, n$, label titik-titik$v_i$berturut-turut adalah $\{1{,}7{,}13, \dots, 3n+1\}$.
   b. Untuk $i = 1{,}3{,}5, \dots, n$, label titik-titik v_i' berturut-turut adalah $\{3{,}9{,}15, \dots, 3n-1\}$, sedangkan untuk $i = 2{,}4{,}6, \dots, n$, label titik-titik v_i' berturut-turut adalah $\{3(2n-2)+5, 3(2n-4)+5, 3(2n-6)+5, \dots, 3n+5\}$.
   c. Untuk $i = 1{,}3{,}5, \dots, n$, label titik-titik v_i'' berturut-turut adalah $\{5{,}11{,}17, \dots, 3n-1\}$, sedangkan untuk $i = 2{,}4{,}6, \dots, n$, label titik-titik v_i' berturut-turut adalah $\{6n+1, 6n-5, 6n-11, \dots, 3n+7\}$

Setelah pelabelan titik-titiknya diperoleh maka sisi-sisinya akan mendapat label menurut aturan pelabelan *super graceful* sebagai berikut.

$f(v_i v_{i+1}) = |f(v_i) - f(v_{i+1})| = 2(3n-3i+1)$,untuk $0 \le i \le n$

$$f(v_i v_i') = \begin{cases} |f(v_i) - f(v'_i)| = 6(n-i+1) & \text{untuk } 1 \le i \le n \text{dan} i \equiv 1 (mod\ 2) \\ |f(v_i) - f(v'_i)| = 2(3n-3i+2) & \text{untuk } 1 \le i \le n \text{dan} i \equiv 0 (mod\ 2) \end{cases}$$

$$f(v_i v_i'') = \begin{cases} |f(v_i) - f(v''_i)| = 2(3n-3i+2) & \text{untuk } 1 \le i \le n \text{dan} i \equiv 1 (mod\ 2) \\ |f(v_i) - f(v''_i)| = 6(n-i+1) & \text{untuk } 1 \le i \le n \text{dan} i \equiv 0 (mod\ 2) \end{cases}$$

Dari pelabelan di atas, dapat dilihat bahwa label pada setiap sisi berbeda.

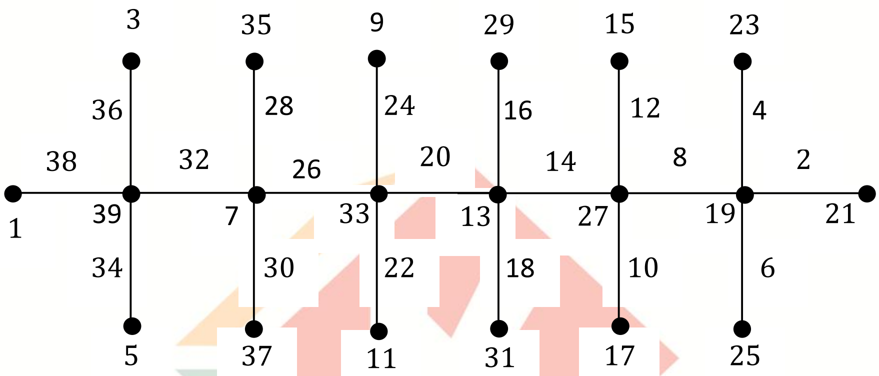
1. Untuk $i = 0{,}1{,}2, \dots, n$, label titik-titik $v_i v_{i+1}$ berturut-turut adalah $\{2(3n+1), 2(3n-2), 2(3n-5), 2(3n-8), \dots, 2\}$.

   Untuk label titik-titik $v_i v_{i+1}$ tidak berlaku untuk n ganjil dan n genap, karena dengan satu himpunan dapat memperoleh label untuk n ganjil dan n ganjil.
2. Untuk n ganjil
   a. Untuk $i = 1{,}3{,}5, \dots, n+1$, labeltitik-titik $v_i v_i'$ berturut-turut adalah $\{6n, 6(n-2), 6(n-4), \dots, 6\}$ sedangkanuntuk $i = 2{,}4{,}6, \dots, n$, labeltitik-titik $v_i v_i'$ berturut-turutadalah $\{2(3n-4), 2(3n-10), 2(3n-16), \dots, 10\}$.
   b. Untuk $i = 1{,}3{,}5, \dots, n$, label titik-titik $v_i v_i''$ berturut-turut adalah $\{2(3n-1), 2(3n-7), 2(3n-13), \dots, 4\}$, sedangkan untuk $i = 2{,}4{,}6, \dots, n$, label titik-titik $v_i v_i''$ berturut-turut adalah $\{6(n-1), 6(n-3), 6(n-5), \dots, 12\}$.

3. Untuk n genap
   a. Untuk $i = 1,3,5, \dots, n$, label titik-titik v_i berturut-turut adalah $\{6n, 6(n-2), 6(n-4), \dots, 12\}$ sedangkan untuk $i = 2,4,6 \dots, n$, label titik-titik v_i berturut-turut adalah $\{2(3n-4), 2(3n-10), 2(3n-16), \dots, 4\}$.
   b. Untuk $i = 1,3,5, \dots, n$, label titik-titik $v_i v_i^{"}$ berturut-turut adalah $\{2(3n-1), 2(3n-7), 2(3n-13), \dots, 10\}$, sedangkan untuk $i = 2,4,6, \dots, n$, label titik-titik $v_i v_i^{"}$ berturut-turut adalah $\{6(n-1), 6(n-3), 6(n-5), \dots, 6\}$.

Dapat dilihat bahwa semua pelabelan pada himpunan titik dan pelabelan pada himpunan sisi berbeda dengan gabungan dari kedua himpunan titik dan sisi adalah $\{1,2,3, \dots, 3(2n+1)\}$.Oleh karena itu, f adalah pelabelan *super graceful*. Dengan demikian, graf *caterpillar* Cp_n dengan kepala dan ekor dengan n badan dan 2 kaki ditiap badan untuk $n \geq 2$ adalah graf *super graceful*.

Sebagai ilustrasi, Gambar 3 di bawahini menunjukkan pelabelan super graceful pada graf *caterpillar* Cp_6 dengan kepala dan ekor yang mempunyai 6 badan dan 12 kaki .



Gambar 3 Pelabelan *super graceful* pada graf *caterpillar* Cp_n dengan kepala dan ekor yang mempunyai 6 badan dan 12 kaki.

2. Pelabelan *Super Graceful* pada Graf Caterpillar Cp_n Tanpa Kepala dan Ekor dengan *n* Badan dan 2Kaki pada Tiap Badan.

Teorema 3.2 Graf *caterpillar* Cp_n tanpa kepala dan ekor yang mempunyai n badan dan $2n$ kaki, untuk $n \geq 2$, merupakan graf *super graceful*.

Bukti

Misalkan $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ adalah himpunan titik pada graf *caterpillar* dimana, $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$, $V_2 = \{v_1', v_2', v_3', \dots, v_n'\}$ dan $V_3 = \{v_1^{"}, v_2^{"}, v_3^{"}, \dots, v_n^{"}\}$.

Definisikan pelabelan $f: V(Cp_n) \cup E(Cp_n) \to \{1,2, \dots, 6n-1\}$ pada graf *caterpillar* Cp_n tanpa kepala dan ekor dengan aturan yaitu sebagai berikut:

$$f(v_i) = \begin{cases} 3(2n-i+2) & \text{untuk } 1 \leq i \leq n \text{ dan } i \equiv 1 (mod\ 2) \\ 3i-1 & \text{untuk } 1 \leq i \leq n \text{ dan } i \equiv 0 (mod\ 2) \end{cases}$$

$$f(v_i') = \begin{cases} 3i-2 & \text{untuk } 1 \leq i \leq n \text{ dan } i \equiv 1 (mod\ 2) \\ 3(2n-i)+1 & \text{untuk } 1 \leq i \leq n \text{ dan } i \equiv 0 (mod\ 2) \end{cases}$$

$$f(v_i^{"}) = \begin{cases} 3i & \text{untuk } 1 \leq i \leq n \text{ dan } i \equiv 1 (mod\ 2) \\ 3(2n-i+1) & \text{untuk } 1 \leq i \leq n \text{ dan } i \equiv 0 (mod\ 2) \end{cases}$$

Dari pelabelan di atas, dapat dilihat bahwa label pada setiap titik berbeda.

1. Untuk n ganjil
   a. Untuk $i = 1,3,5, \dots, n$, label titik-titik v_i berturut-turut adalah $\{6n-1, 6n-7, 6n-13, \dots, 3n+2\}$ sedangkan untuk $i = 2,4,6 \dots, n$, label titik-titik v_i berturut-turut adalah $\{5,11,17, \dots, 3n-4\}$.

b. Untuk $i = 1,3,5, \dots, n$, label titik-titik v_i' berturut-turut adalah $\{1,7,13, \dots, 3n-5\}$, sedangkan untuk $i = 2,4,6, \dots, n$, label titik-titik v_i' berturut-turut adalah $\{6n-5, 6n-136n-17, , \dots, 3n+4\}$.

c. Untuk $i = 1,3,5, \dots, n$, label titik-titik $v_i^{"}$ berturut-turut adalah $\{3,9,15, \dots, 3n\}$, sedangkan untuk $i = 2,4,6, \dots, n$, label titik-titik v_i' berturut-turut adalah $\{3(2n-1), 3(2n-3), 3(2n-5), \dots, 3(n+2)\}$.

2. Untuk n genap
   a. Untuk $i = 1,3,5, \dots, n$, labeltitik-titik v_i berturut-turut adalah $\{6n-1, 6n-7, 6n-13, \dots, 3n-1\}$ sedangkanuntuk $i = 2,4,6 \dots, n$, labeltitik-titik v_i berturut-turut adalah $\{5,11,17, \dots, 3n-1\}$.
   b. Untuk $i = 1,3,5, \dots, n$, label titik-titik v_i' berturut-turut adalah $\{1,7,13, \dots, 3n-2\}$, sedangkan untuk $i = 2,4,6, \dots, n$, label titik-titik v_i' berturut-turut adalah $\{6n-5, 6n-136n-17, , \dots, 3n+1\}$.
   c. Untuk $i = 1,3,5, \dots, n$, label titik-titik $v_i^{"}$ berturut-turut adalah $\{3,9,15, \dots, 3n-1\}$, sedangkan untuk $i = 2,4,6, \dots, n$, label titik-titik v_i' berturut-turut adalah $\{3(2n-1), 3(2n-3), 3(2n-5), \dots, 3(n+1)\}$.

Setelah pelabelan titik-titiknya diperoleh maka sisi-sisinya akan mendapat label menurut aturanpelabelan*super graceful* sebagai berikut.

$$f(v_i v_{i+1}) = |f(v_i) - f(v_{i+1})| = 6(n-i), \text{untuk } 1 \le i \le n-1$$

$$f(v_i v_i') = \begin{cases} |f(v_i) - f(v_i')| = 2(3n-3i+2), \text{untuk } 1 \le i \le n, i \equiv 1 (mod\ 2) \\ |f(v_i) - f(v_i')| = 2(3n-3i+1), \text{untuk } 1 \le i \le n, i \equiv 0 (mod\ 2) \end{cases}$$

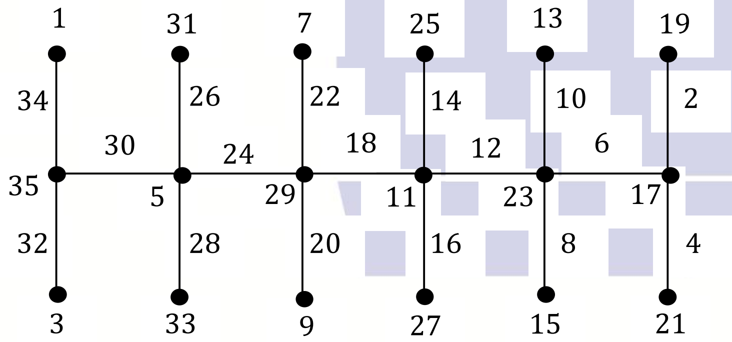
$$f(v_i v_i^{"}) = \begin{cases} \left|f(v_i) - f\left(v_i^{"}\right)\right| = 2(3n-3i+1), \text{untuk } 1 \le i \le n, i \equiv 1 (mod\ 2) \\ \left|f(v_i) - f\left(v_i^{"}\right)\right| = 2(3n-3i+2), \text{untuk } 1 \le i \le n, i \equiv 0 (mod\ 2) \end{cases}$$

pelabelan di atas, dapat dilihat bahwa labelpadasetiaptitikberbeda.

1. Untuk $i = 1,2,3, \dots, n-1$, labeltitik-titik $v_i v_{i+1}$ berturut-turut adalah $\{6n-6, 6n-12, 6n-18, \dots, 6\}$.
2. Untuk n ganjil
   a. Untuk $i = 1,3,5, \dots, n$, label titik-titik $v_i v_i'$ berturut-turut adalah $\{2(3n-1), 2(3n-7), 2(3n-13), \dots, 4\}$, sedangkan untuk $i = 2,4,6, \dots, n$, label titik-titik $v_i v_i'$ berturut-turut adalah $\{2(3n-5), 2(3n-11), 2(3n-17), \dots, 8\}$.
   b. Untuk $i = 1,3,5, \dots, n$, label titik-titik $v_i v_i^{"}$ berturut-turut adalah $\{2(3n-2), 2(3n-8), 2(3n-14), \dots, 2\}$, sedangkan untuk $i = 2,4,6, \dots, n$, label titik-titik $v_i v_i^{"}$ berturut-turut adalah $\{2(3n-4), 2(3n-10), 2(3n-16), \dots, 4\}$.
3. Untuk$n$ genap
   a. Untuk $i = 1,3,5, \dots, n$, label titik-titik $v_i v_i'$ berturut-turut adalah $\{1,7,13, \dots, 3n-2\}$, sedangkan untuk $i = 2,4,6, \dots, n$, label titik-titik $v_i v_i'$ berturut-turut adalah $\{2(3n-5), 2(3n-11), 2(3n-17), \dots, 2\}$.
   b. Untuk $i = 1,3,5, \dots, n$, label titik-titik $v_i v_i^{"}$ berturut-turut adalah $\{2(3n-2), 2(3n-8), 2(3n-14), \dots, 4\}$, sedangkan untuk $i = 2,4,6, \dots, n$, label titik-titik $v_i v_i^{"}$ berturut-turut adalah $\{2(3n-4), 2(3n-10), 2(3n-16), \dots, 10\}$.

Dapat dilihat bahwa semua pelabelan pada himpunan titik dan pelabelan pada himpunan sisi berbeda dengan gabungan dari kedua himpunan titik dan sisi adalah $\{1,2,3, \dots, 6n-1\}$. Oleh karena itu, f adalah pelabelan *super graceful*. Dengan demikian, graf *caterpillar*Cp_n dengan kepala dan ekor tanpa$n$ badan dan 2 kaki ditiap badan untuk $n \ge 2$ adalah graf *super graceful*.

Sebagai ilustrasi, Gambar 2 menunjukkan pelabelan super graceful pada graf *caterpillar*Cp_6 tanpa kepala dan ekor yang mempunyai 6 badan dan 12 kaki merupakan graf *super graceful*.



Gambar 4 Pelabelan *super graceful* pada graf *caterpillar* Cp_6
tanpa kepala dan ekor yang mempunyai 6 badan dan 12 kaki.

3. Pelabelan *Super Graceful* pada Graf *Caterpillar* $Cp_{m,n}$ tanpa kepala dan ekor

Graf *caterpillar* $Cp_{m,n}$ tanpa kepala dan ekor memiliki himpunan titik $\{v_1, v_2, \dots, v_n; v_1^1, v_2^1, \dots, v_m^1; v_1^2, v_2^2, \dots, v_m^2; \dots; v_1^n, v_2^n, \dots, v_m^n;\}$.

Berikut ini diberikan teorema pelabelan *super graceful* pada graf *caterpillar* $Cp_{m,n}$ tanpa kepala dan ekor yang mempunyai n badan dan mn kaki pada tiap badan.

Teorema 3.3 Setiap graf *caterpillar*$Cp_{m,n}$ tanpa kepala dan ekor yang mempunyai n badan dan mn kaki pada tiap badan merupakan graf *super graceful*.

Bukti

Akan dibuktikan graf *caterpillar* $Cp_{m,n}$tanpa kepala dan ekor yang mempunyai n badan (dimana n diambil hanya dari 3 sampai 5) dan mn kaki, dimana n adalah badan dan m adalah kaki, yang mempunyai $mn + n$ titik dan $mn + n - 1$ sisi.

Definisikan pelabelan untuk titik-titik : $V(Cp_{m,n}) \cup E(Cp_{m,n}) \rightarrow \{1,2,3, \dots, 2(mn + n) - 1\}$ pada graf *caterpillar* $Cp_{m,n}$ tanpa kepala dan ekor dengan aturan yaitu sebagai berikut:

a. Untuk $n = 3$, yaitu graf *caterpillar* $Cp_{m,3}$ tanpa kepala dan ekor yang mempunyai 3 badan dan $3m$ kaki dengan aturan sebagai berikut:

$$f(v_i) = \begin{cases} 2(mn + n) - i, & i = 1 \\ 2m + i - 1, & i = 2 \\ 2(2m + n) - i, i = 3 \end{cases}$$

$$f(v_i^j) = \begin{cases} 2i - j, 1 \le i \le m, & j = 1 \\ 2(2m + i) + j + 1, 1 \le i \le m, & j = 2 \\ 2(m + i - 1) + j, 1 \le i \le m, & j = 3 \end{cases}$$

Dari pelabelan di atas, dapat dilihat bahwa label pada setiap titik berbeda.

1. Untuk$i = 1$, label titik-titikv_i berturut-turut adalah $\{2(mn + n) - 1\}$, untuk $i = 2$, label titik-titikv_i berturut-turut adalah $\{2m + 1\}$, sedangkan untuk $i = 3$, label titik-titikv_i berturut-turut adalah $\{2(2m + n) - 3\}$
2. Untuk $i = 1,2,3, \dots, m$ dan $j = 1$ label titik-titik v_i^j berturut-turut adalah $\{1,3,5, \dots, 2m - 1\}$, untuk $i = 1,2,3, \dots, m$ dan $j = 2$, label titik-titik v_i' berturut-turut adalah $\{4m + 5, 4m + 7, 4m + 9, \dots, 6m + 3\}$, sedangkan $i = 1,2,3, \dots, m$ dan $j = 3$, label titik-titik v_i' berturut-turut adalah $\{2m + 3, 2m + 5, 2m + 7, \dots, 4m + 1\}$.

Setelah pelabelan titik-titiknya diperoleh maka sisi-sisinya akan mendapat label menurut aturan pelabelan *super graceful* sebagai berikut.

$$f(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} |f(v_i) - f(v_{i+1})| = 2(mn + n - m) - i - 1, \text{untuk } i = 1 \\ |f(v_i) - f(v_{i+1})| = 2(m + n - 1) - i, \text{untuk } i = 2 \end{cases}$$

$$f(v_i v_i^j) = |f(v_i) - f(v_i^j)| = 2(mn + n - i) + j - 1, \text{ untuk } 1 \le i \le m, j = 1$$

$$f(v_{i+1} v_i^j) = |f(v_{i+1}) - f(v_i^j)| = 2(m + i) + j, \text{ untuk } 1 \le i \le m, j = 2$$

$$f(v_{i+2} v_i^j) = |f(v_{i+2}) - f(v_i^j)| = 2(m + n - i) - j - 1, \text{ untuk } 1 \le i \le m, j = 3$$

Dari pelabelan di atas, dapat dilihat bahwa label pada setiap sisi berbeda.

1. Untuk $i = 1$, label titik-titik $v_i v_{i+1}$ berturut-turut adalah $\{2(mn + n - m - 1)\}$, untuk $i = 2$, sedangkan label titik-titik $v_i v_{i+1}$ berturut-turut adalah $\{2(m + n - 2)\}$.
2. Untuk $i = 1,2,3, \dots, m$ dan $j = 1$ label titik-titik $v_i v_i^j$ berturut-turut adalah $\{2(mn + n - 1), 2(mn + n - 2), 2(mn + n - 3), \dots, 2(mn + n - m)\}$, untuk $i = 1,2,3, \dots, m$ dan $j = 2$, label titik-titik $v_{i+1} v_i^j$ berturut-turut adalah $\{2(m + 2), 2(m + 3), 2(m + 4), \dots, 2(2m + 1)\}$, sedangkan $i = 1,2,3, \dots, m$ dan $j = 3$, label titik-titik $v_{i+2} v_i^j$ berturut-turut adalah $\{2(m + n - 3), 2(m + n - 4), 2(m + n - 5), \dots, 2n - 4\}$.

b. Untuk $n = 4$, yaitu graf *caterpillar* $Cp_{m,4}$ tanpa kepala dan ekor yang mempunyai 4 badan dan $4m$ kaki dengan aturan sebagai berikut:

$$f(v_i) = \begin{cases} 2(mn + n) - i, & i = 1 \\ 2(m - i) + n + 1, & i = 2 \\ 2mi + n + 1, & i = 3 \\ 4m + i - 1, & i = 4 \end{cases}$$

$$f(v_i^j) = \begin{cases} 2i - j, & 1 \le i \le m, j = 1 \\ 2mn + n + 1 - j(i - 1), & 1 \le i \le m, j = 2 \\ 2(m + i - 1) + j, & 1 \le i \le m, j = 3 \\ mn + 2i + j - 1, & 1 \le i \le m, j = 4 \end{cases}$$

Dari pelabelan di atas, dapat dilihat bahwa label pada setiap titik berbeda.

1. Untuk $i = 1$, label titik-titik v_i berturut-turut adalah $\{2(mn + n) - 1\}$, untuk $i = 2$, label titik-titik v_i berturut-turut adalah $\{2m + n - 3\}$, untuk $i = 3$, label titik-titik v_i berturut-turut adalah $\{4m + n + 1\}$, sedangkan untuk $i = 4$, label titik-titik v_i berturut-turut adalah $\{4m + 3\}$
2. Untuk $i = 1,2,3, \dots, m$ dan $j = 1$ label titik-titik v_i^j berturut-turut adalah $\{1,3,5, \dots, 2m - 1\}$, untuk $i = 1,2,3, \dots, m$ dan $j = 2$, label titik-titik v_i' berturut-turut adalah $\{2mn + n + 1, 2mn + n - 1, 2mn + n - 3, \dots, 2(mn - m) + n + 3\}$, untuk $i = 1,2,3, \dots, m$ dan $j = 3$, label titik-titik v_i' berturut-turut adalah $\{2m + 3, 2m + 5, 2m + 7, \dots, 4m + 1\}$, sedangkan untuk $i = 1,2,3, \dots, m$ dan $j = 4$, label titik-titik v_i' berturut-turut adalah $\{mn + 5, m + 7, m + 9, \dots, m(n + 2) + 3\}$.

Setelah pelabelan titik-titiknya diperoleh maka sisi-sisinya akan mendapat label menurut aturan pelabelan *super graceful* sebagai berikut.

$$f(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} |f(v_i) - f(v_{i+1})| = 2(mn - m) + n - i + 3, \text{untuk } i = 1 \\ |f(v_i) - f(v_{i+1})| = 2(2m + i), \quad \text{untuk } i = 2 \\ |f(v_i) - f(v_{i+1})| = 2(mi - 2m - 1) + n, \quad \text{untuk } i = 3 \end{cases}$$

$$f(v_i v_i^j) = |f(v_i) - f(v_i^j)| = 2(mn + n - i) + j - 1, \text{ untuk } 1 \le i \le m, j = 1$$

$$f(v_{i+1} v_i^j) = |f(v_{i+1}) - f(v_i^j)| = 2(mn - m + 2) - j(i - 1), \text{ untuk } 1 \le i \le m, j = 2$$

$$f(v_{i+2} v_i^j) = |f(v_{i+2}) - f(v_i^j)| = 2(2m - i) + n - j + 3, \text{ untuk } 1 \le i \le m, j = 3$$

$$f(v_{i+3} v_i^j) = |f(v_{i+3}) - f(v_i^j)| = m(n - 4) + 2i + j - 4, \text{ untuk } 1 \le i \le m, j = 4$$

Dari pelabelan di atas, dapat dilihat bahwa label pada setiap sisi berbeda.

1. Untuk $i = 1$, label titik-titik $v_i v_{i+1}$ berturut-turut adalah $\{2(mn - m) + n + 2\}$, untuk $i = 2$, label titik-titik $v_i v_{i+1}$ berturut-turut adalah $\{2(2m + 2)\}$, untuk $i = 3$, sedangkan label titik-titik $v_i v_{i+1}$ berturut-turut adalah $\{2(m - 1) + n\}$.
2. Untuk $i = 1,2,3, \dots, m$ dan $j = 1$ label titik-titik $v_i v_i^j$ berturut-turut adalah $\{2(mn + n - 1), 2(mn + n - 2), 2(mn + n - 3), \dots, 2(mn + n - m)\}$, untuk $i = 1,2,3, \dots, m$ dan $j = 2$, label titik-titik $v_{i+1} v_i^j$ berturut-turut adalah $\{2(mn - m + 2), 2(mn - m + 1), 2(mn - m), \dots, 2(mn - 2m + 3)\}$, untuk $i = 1,2,3, \dots, m$ dan $j = 3$, label titik-titik $v_{i+2} v_i^j$ berturut-turut adalah $\{2(2m - 1) + n, 2(2m - 2) + n, 2(2m - 3) + n, \dots, 2m + n\}$, untuk $i = 1,2,3, \dots, m$ dan $j = 4$, sedangkan label titik-titik $v_{i+3} v_i^j$ berturut-turut adalah $\{mn - 4m + 2, mn - 4m + 4, mn - 4m + 6, \dots, mn - 2m\}$.

c. Untuk $n = 5$, yaitu graf *caterpillar* $Cp_{m,5}$ tanpa kepala dan ekor yang mempunyai 5 badan dan $5m$ kaki dengan aturan sebagai berikut:

$$f(v_i) = \begin{cases} 2(mn + n) - i, & i = 1 \\ 2m + i - 1, & i = 2 \\ 3(m + i) + mn - 2, & i = 3 \\ i(m + 1) - 1, & i = 4 \\ mn + m + i, & i = 5 \end{cases}$$

$$f(v_i^j) = \begin{cases} 2i - j, & 1 \le i \le m, j = 1 \\ 2(mn + j - i) + n, & 1 \le i \le m, j = 2 \\ 2(m + i - 1) + j, & 1 \le i \le m, j = 3 \\ 2(mn - m - i + j) - 1, & 1 \le i \le m, j = 4 \\ mn + m - 2i + j, & 1 \le i \le m, j = 5 \end{cases}$$

Dari pelabelan di atas, dapat dilihat bahwa label pada setiap titik berbeda.

1. Untuk $i = 1$, label titik-titik v_i berturut-turut adalah $\{2(mn + n) - 1\}$, untuk $i = 2$, label titik-titik v_i berturut-turut adalah $\{2m + 1\}$, untuk $i = 3$, label titik-titik v_i berturut-turut adalah $\{3m + mn + 7\}$, untuk $i = 4$, label titik-titik v_i berturut-turut adalah $\{4m + 3\}$, sedangkan untuk $i = 5$, label titik-titik v_i berturut-turut adalah $\{mn + m + 5\}$.
2. Untuk $i = 1,2,3, \dots, m$ dan $j = 1$ label titik-titik v_i^j berturut-turut adalah $\{1,3,5, \dots, 2m - 1\}$, untuk $i = 1,2,3, \dots, m$ dan $j = 2$, label titik-titik v_i^j berturut-turut adalah $\{2(mn + 1) + n, 2(mn) + n, 2(mn - 1) + n, \dots, 2(mn - m + 2) + n\}$, untuk $i = 1,2,3, \dots, m$ dan $j = 3$, label titik-titik v_i' berturut-turut adalah $\{2m + 3, 2m + 5, 2m + 7, \dots, 4m + 1\}$, untuk $i = 1,2,3, \dots, m$ dan $j = 4$, label titik-titik v_i' berturut-turut adalah $\{2(mn - m) + 5, 2(mn - m) + 3, 2(mn - m) + 1, \dots, 2(mn - 2m) + 7\}$, sedangkan untuk $i = 1,2,3, \dots, m$ dan $j = 5$, label titik-titik v_i' berturut-turut adalah $\{mn + m + 3, mn + m + 1, mn + m - 1, \dots, mn - m + 5\}$.

Setelah pelabelan titik-titiknya diperoleh maka sisi-sisinya akan mendapat label menurut aturan pelabelan *super graceful* sebagai berikut:

$$f(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} |f(v_i) - f(v_{i+1})| = 2(mn + n - m) - i - 1, & \text{untuk } i = 1 \\ |f(v_i) - f(v_{i+1})| = mn + m - i + 8, & \text{untuk } i = 2 \\ |f(v_i) - f(v_{i+1})| = mn - m + 3i - 5, & \text{untuk } i = 3 \\ |f(v_i) - f(v_{i+1})| = mn + m - mi - i + 6, & \text{untuk } i = 4 \end{cases}$$

$f(v_i v_i^j) = |f(v_i) - f(v_i^j)| = 2(mn + n - i) + j - 1$, untuk $1 \le i \le m, j = 1$

$f(v_{i+1} v_i^j) = |f(v_{i+1}) - f(v_i^j)| = 2(mn - m - i + j) + n - 1$, untuk $1 \le i \le m, j = 2$

$f(v_{i+2} v_i^j) = |f(v_{i+2}) - f(v_i^j)| = mn + m - 2i - j + 9$, untuk $1 \le i \le m, j = 3$

$f(v_{i+3} v_i^j) = |f(v_{i+3}) - f(v_i^j)| = 2(mn - 3m - i + j - 2)$, untuk $1 \le i \le m, j = 4$

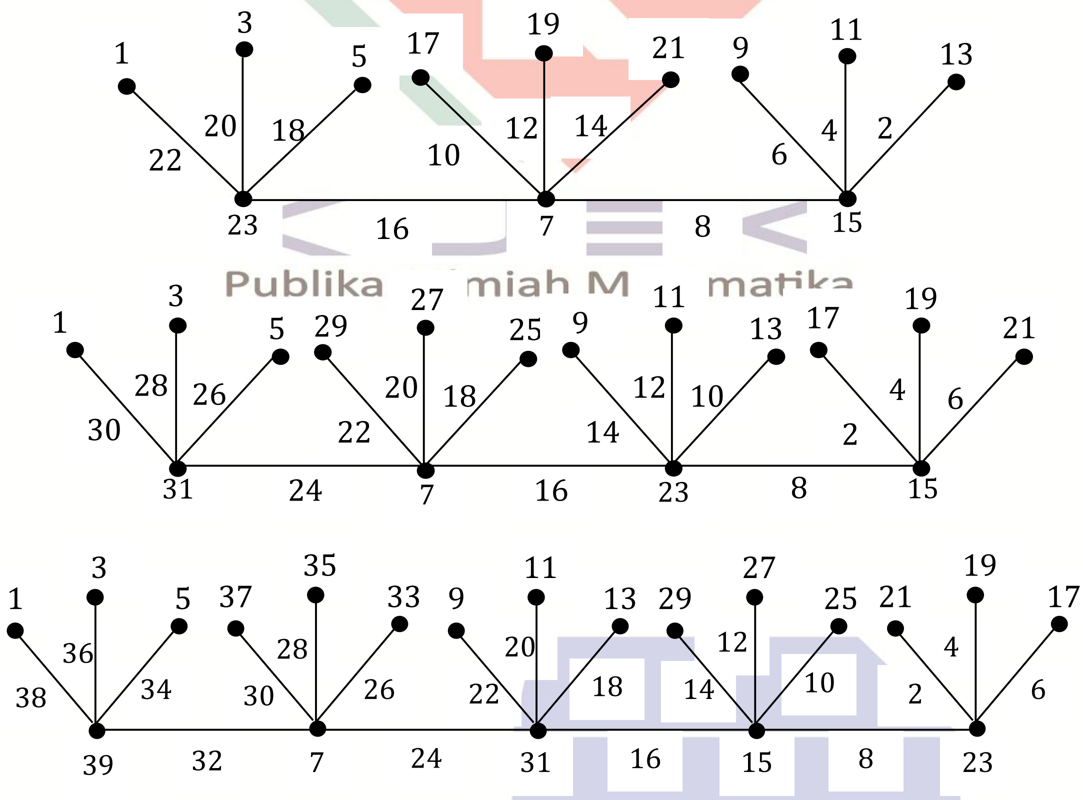
$f(v_{i+4}v_i^j) = |f(v_{i+4}) - f(v_i^j)| = 2i - j + 5$, untuk $1 \le i \le m, j = 5$

Dari pelabelan di atas, dapat dilihat bahwa label pada setiap sisi berbeda.

1. Untuk $i = 1$, label titik-titik $v_i v_{i+1}$ berturut-turut adalah $\{2(mn + n - m + 1)\}$, untuk $i = 2$, label titik-titik $v_i v_{i+1}$ berturut-turut adalah $\{mn + m + 6\}$, untuk $i = 3$, label titik-titik $v_i v_{i+1}$ berturut-turut adalah $\{mn - m + 4\}$, sedangkan untuk $i = 4$, label titik-titik $v_i v_{i+1}$ berturut-turut adalah$\{mn - 3m + 2\}$.
2. Untuk $i = 1,2,3,\dots,m$ dan $j = 1$ label titik-titik $v_i v_i^j$ berturut-turut adalah $\{2(mn + n - 1), 2(mn + n - 2), 2(mn + n - 3), \dots, 2(mn + n - m)\}$, untuk $i = 1,2,3,\dots,m$ dan $j = 2$, label titik-titik $v_{i+1}v_i^j$ berturut-turut adalah $\{2(mn - m) + n + 1, 2(mn - m) + n - 1, 2(mn - m) + n - 3, \dots, 2(mn - 2m) + n + 3\}$, untuk $i = 1,2,3,\dots,m$ dan $j = 3$, label titik-titik $v_{i+2}v_i^j$ berturut-turut adalah $\{mn + m + 4, mn + m + 2, mn + m, \dots, mn - m + 6\}$, untuk $i = 1,2,3,\dots,m$ dan $j = 4$, label titik-titik $v_{i+3}v_i^j$ berturut-turut adalah $\{2(mn - 3m + 1), 2(mn - 3m), 2(mn - 3m - 1), \dots, 2(mn - 4m + 2)\}$, sedangkan untuk $i = 1,2,3,\dots,m$ dan $j = 5$, label titik-titik $v_{i+4}v_i^j$ berturut-turut adalah $\{2,4,6,\dots,2m\}$.

Dapat dilihat bahwa pelabelan pada himpunan titik dan pada himpunan sisi berbeda untuk $3 \le n \le 5$, dengan gabungan dari kedua himpunan titik dan sisi adalah $\{1,2,3,\dots,2(mn + n) - 1\}$. Maka f adalah pelabelan *super graceful*. Dengan demikian setiap graf *caterpillar*$Cp_{m,n}$ tanpa kepala dan ekor adalah graf *super graceful*.

Sebagai ilustrasi, Gambar 5 menunjukkan pelabelan *super graceful* pada graf *caterpillar* $Cp_{m,n}$ tanpa kepala dan ekor yang mempunyai n badan dan mn kaki, untuk $m = 3$ dan $n = 3,4,5$.



Gambar 5 Pelabelan *super graceful* pada graf *caterpillar* $Cp_{3,3}$, $Cp_{3,4}$, dan $Cp_{3,5}$

Kesimpulan

Dari uraian diatas dapat disimpulkan bahwa graf *caterpillar* Cp_n dengan atau tanpa kepala dan ekor yang mempunyai n badan dan 2 kaki pada tiap badan merupakan graf *super graceful*. Selain itu, Graf *caterpillar* $Cp_{m,n}$ tanpa kepala dan ekor yang mempunyai 5 badan dan $5m$ juga merupakan graf *super graceful*.

Referensi

[1] Bala, E, dkk, Graph labeling in competition graph, *Indian Journal of Science and Technology*, 4(8): 0974-6846, 2011.

[2] Fathoni, A, *Pelabelan Super Sisi Ajaib padaGraph Caterpillar*, Tugas Akhir, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Malang, 2009.

[3] Gallian, J.A, A Dynamic Survey of Graph Labeling, tenth edition, *The Electronic Journal of Combinatorics,* 17(11): 05C78, 2011.

[4] J.A. BondydanMurty, *Graph Theory with Applications*, Penerbit The Macmillan Press Ltd, 1976.

[5] Kusumah, Y.S, *Matematika Diskrit*, Penerbit IKIP Bandung Press, 1997.

[6] Munir, R, *Matematika Diskrit,* Penerbit Informatika, 2005.

[7] Perumal, M.A., dkk, Super Graceful Labeling For Some Special Graphs*, Journal Mathematics,* 9(3): 06, 2011.

[8] Watson, R. Lynn, A Survey on The Graceful Labeling of Graph, *This Thesis for the Master of Science*, University of Colorado at Denver in Partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science Applied Mathematics, 2000.