GELANGGANG PRIMA LEMAH KIRI PENUH DAN IDEAL FRAKSI YANG MERUPAKAN IDEAL HAMPIR PRIMA

Muhammad Nur Hidayat Taufiqurrahman[1, a)]dan Dellavitha Nasution[1, b)]

[1]*Institut Teknologi Bandung*

[a)]*dayatugm@gmail.com*
[b)] *dellavitha@itb.ac.id*

Abstrak

Tulisan karya Abouhalaka dan Findik yang berjudul "Almost Prime Ideals in Noncommutative Rings" menghasilkan konsep tentang gelanggang dengan setiap ideal kanannya adalah ideal hampir prima yang disebut dengan gelanggang hampir prima kanan penuh. Paper ini menerapkan konsep tersebut untuk ideal prima lemah kiri, dan akan membuktikan bahwa sifat-sifat pada ideal hampir prima kanan yang diperoleh Abouhalaka dan Findik juga berlaku pada ideal prima lemah kiri dengan suatu kondisi tambahan. Selain itu, penulis memberikan hasil tambahan untuk modul fraksi yang merupakan ideal hampir prima.

Kata Kunci: ideal prima kiri, ideal prima lemah kiri, ideal hampir prima kiri, gelanggang prima lemah kiri penuh, gelanggang prima lemah kiri hampir penuh.

Abstract

The work by Abouhalaka and Findik, titled "Almost Prime Ideals in Noncommutative Rings," introduces the concept of rings in which every right ideal is an almost prime ideal, which is called fully almost prime right ring [1]. This paper applies this concept to weakly prime left ideals and aims to demonstrate that the properties established for almost prime right ideals by Abouhalaka and Findik also hold for weakly prime left ideals under certain additional conditions. Additionally, the authors provide supplementary results for the fraction module, which constitutes an almost prime ideal.

Keywords: prime left ideal, weakly prime left ideal, almost prime left ideal, fully weakly prime left ring, almost fully weakly prime left ring.

Pendahuluan

Pada tahun 2010, Hirano memperluas gagasan mengenai ideal prima pada suatu gelanggang nonkomutatif dan mendefinisikan ideal prima lemah [2], [3]. Mereka juga meneliti struktur gelanggang nonkomutatif yang semua idealnya adalah ideal prima lemah sebagai analogi dari karya Blair dan Tsuitsui yang meneliti gelanggang yang semua idealnya adalah ideal hampir prima [4], [5] [6], [7].

Pada penelitian terbaru di tahun 2020, Groenewald mengemukakan sifat baru dari ideal prima lemah pada gelanggang nonkomutatif [7]. Pada tahun 2022, Abouhalaka dan Findik menggunakan definisi ideal hampir prima yang diperkenalkan oleh Bhatwadekar dan P.S. Salma di gelanggang nonkomutatif [1], [8], [9].

Abouhalaka dan Findik mencari hubungan antara dua gelanggang yang dihubungkan oleh epimorfisma. Misalkan $f: R \to S$ adalah epimorfisma gelanggang, hubungan antara gelanggang R dan S yang dijelaskan adalah jika R suatu gelanggang hampir prima kanan penuh maka S adalah gelanggang hampir prima kanan penuh. Sebaliknya, jika S suatu gelanggang hampir prima kanan penuh dan $\mathrm{Ker}(f) \subseteq I$ untuk sebarang ideal kanan $I \subseteq R$ maka R adalah gelanggang hampir prima kanan penuh [1].

Setiap gelanggang prima lemah kanan penuh R adalah gelanggang hampir prima kanan penuh. Pernyataan sebaliknya tidak selalu berlaku. Ia berlaku, jika $P^2 = 0$ untuk setiap ideal kanan $P \subseteq R$. Karena tidak setiap gelanggang hampir prima kanan penuh adalah gelanggang prima lemah kanan penuh maka apa yang diperoleh Abouhalaka dan Findik yaitu, jika $f: R \to S$ adalah epimorfisma gelanggang dan R suatu gelanggang hampir prima kanan penuh maka S adalah gelanggang hampir prima kanan penuh, menarik untuk dikaji. Jika R diganti menjadi gelanggang prima lemah kanan penuh maka R merupakan gelanggang hampir prima kanan penuh. Dari hasil tersebut maka S gelanggang hampir prima penuh. Dalam tulisan ini akan dibuktikan bahwa S adalah gelanggang prima lemah kanan penuh jika memenuhi suatu kondisi tambahan [1]. Gelanggang dalam tulisan ini tidak harus komutatif sehingga secara umum idealnya dipandang sebagai ideal satu sisi [10].

Tinjauan Pustaka

Penelitian ini bertujuan untuk membuktikan bahwa sifat-sifat pada ideal hampir prima kanan yang diperoleh Abouhalaka dan Findik juga berlaku pada ideal prima lemah kiri dengan suatu kondisi tambahan. Hasil-hasil yang diperoleh oleh Abouhalaka dan Findik sebagai berikut:

Teorema 1. Misalkan $f : R \to S$ adalah epimorfisma gelanggang, dan P adalah ideal hampir prima kanan dari R sedemikian sehingga $ker\ f \subseteq P$. Maka $f(P)$ adalah ideal hampir prima kanan dari S.

Akibat 2. Misalkan $f : R \to S$ adalah epimorfisma gelanggang, dan B adalah ideal kanan dari S sedemikian sehingga $f^{-1}(B)$ adalah ideal hampir prima kanan dari R. Maka, B adalah ideal hampir prima kanan dari S.

Teorema 3. Misalkan $f : R \to S$ adalah epimorfisma gelanggang, dan P adalah ideal kanan dari R sedemikian sehingga $ker\ f \subseteq P^2$. Jika $f(P)$ adalah ideal hampir prima kanan dari S, maka P adalah ideal hampir prima kanan dari R.

Akibat 4. Misalkan $f : R \to S$ adalah epimorfisma gelanggang, dan B adalah ideal kanan dari S sedemikian sehingga $f^{-1}(B)\ ker\ f \subseteq (f^{-1}(B))^2$. Maka $f^{-1}(B)$ adalah ideal hampir prima kanan dari R.

Teorema 5. Misalkan $f : R \to S$ adalah epimorfisma gelanggang. Jika R adalah gelanggang hampir prima kanan penuh, maka S adalah gelanggangh hampir prima kanan penuh.

Teorema 6. Misalkan $f : R \to S$ adalah epimorfisma gelanggang sedemikian sehingga $ker\ f \subseteq I^2$, untuk sembarang ideal I dari R. Jika S adalah gelanggang hampir prima kanan penuh, maka R adalah gelanggang hampir prima kanan penuh.

Hasil dan Diskusi

Ideal Prima Lemah

Definisi 7. Misalkan R suatu gelanggang.

1. Ideal kiri P disebut ideal hampir prima kiri jika $AB \subseteq P, AB \nsubseteq P^2$ mengakibatkan $A \subseteq P$ atau $B \subseteq P$ dengan A dan B adalah ideal-ideal kiri dari P.
2. Ideal kiri P disebut ideal prima lemah kiri jika $0 \neq AB \subseteq P$ mengakibatkan $A \subseteq P$ atau $B \subseteq P$ dengan A dan B adalah ideal-ideal kiri dari P.
3. Ideal kiri P disebut ideal prima kiri jika $AB \subseteq P$ mengakibatkan $A \subseteq P$ atau $B \subseteq P$ dengan A dan B adalah ideal-ideal kiri dari P.

Dari definisi di atas terlihat jelas bahwa setiap ideal prima kiri adalah ideal prima lemah kiri, dan setiap ideal prima lemah kiri adalah ideal hampir prima kiri. Namun, sebaliknya tidak selalu berlaku. Sebagai contoh misalkan $R = \{0, a, b, c\}$ adalah gelanggang nonkomutatif dengan operasi biner

Tabel 1. Gelanggang nonkomutatif dengan operasi biner

+	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

.	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	a	b	c
b	0	a	b	c
c	0	0	0	0

dapat dilihat bahwa $I = \{0, b\}, J = \{0, c\}$, dan $P = \{0, a\}$ adalah ideal-ideal kiri dari R. Lebih jauh $JI = \{0\} \subseteq P$, tetapi $I \nsubseteq P$ dan $J \nsubseteq P$, sehingga P bukan ideal prima. Di sisi lain P adalah ideal hampir prima kiri sebagai konsekuensi dari fakta bahwa $P^2 = P$ dan P adalah ideal prima lemah kiri sebagai konsekuensi dari fakta bahwa $JI = \{0\}$.

Misalkan $f: R \to S$ suatu homomorfisma gelanggang, $(P, +)$ suatu subgrup dari $(R, +)$, dan $Ker(f) \subseteq P$. Dapat ditunjukkan bahwa jika $f(X) \subseteq f(P)$ maka $X \subseteq P$. Buktinya sebagai berikut. Misalkan $x \in X$. Karena $f(X) \subseteq f(P)$ maka $f(x) \in f(P)$. Misalkan $f(x) = f(p)$ untuk suatu $p \in P$. Karena f homomorfisma maka $f(x - p) = 0$. Artinya $x - p \in Ker(f) \subseteq P$. Akibatnya untuk setiap $x \in X$ diperoleh $x \in P$. Implikasi ini akan digunakan di bukti Teorema 10 dan Teorema 12.

Teorema 8 [1]. Misalkan $f: R \to S$ adalah epimorfisma gelanggang. Jika P adalah ideal kiri dari R, maka $f(P)$ adalah ideal kiri dari S.

Teorema 9 [1]**.** Misalkan $f: R \to S$ adalah epimorfisma gelanggang. Jika Q suatu ideal kiri dari S maka $f^{-1}(Q)$ adalah ideal kiri dari R.

Teorema 8 dan Teorema 9 menyatakan bahwa $f(P)$ dan $f^{-1}(Q)$ adalah ideal kiri, berikut adalah pembuktian bahwa $f(P)$ dan $f^{-1}(Q)$ juga merupakan ideal prima lemah kiri disertai dengan syarat yang diperlukan.

Teorema 10. Misalkan $f: R \to S$ adalah epimorfisma gelanggang. Jika P adalah ideal prima lemah kiri dari R sedemikian sehingga $Ker\ f \subseteq P$ maka $f(P)$ adalah ideal prima lemah kiri dari S.

Bukti. Misalkan $0 \neq AB \subseteq f(P)$, dengan A dan B ideal-ideal kiri dari S. Karena f bersifat pada maka terdapat ideal-ideal kiri dari R yaitu A' dan B' sehingga $f(A') = A$ dan $f(B') = B$. Perhatikan bahwa $f(A'B') = AB \subseteq f(P)$, dan $A'B'$ adalah ideal kiri dari R. Selanjutnya, karena $f(A'B') \subseteq f(P)$ dan berdasarkan asumsi $Ker(f) \subseteq P$ maka $A'B' \subseteq P$. Perhatikan bahwa $A'B' \neq 0$. Andaikan $A'B' = 0$ maka $AB = f(A'B') = f(0) = 0$. Hal ini kontradiksi dengan asumsi. Jadi $0 \neq A'B' \subseteq P$. Karena P adalah ideal prima lemah kiri maka $A' \subseteq P$ atau $B' \subseteq P$. Dengan demikian $A = f(A') \subseteq f(P)$ atau $B = f(B') \subseteq f(P)$. □

Akibat 11. Misalkan $f: R \to S$ adalah epimorfisma gelanggang dan Q adalah ideal kiri dari S sedemikian sehingga $f^{-1}(Q)$ adalah ideal prima lemah kiri dari R, maka Q adalah ideal prima lemah kiri dari S.

Bukti. Karena Q suatu ideal sehingga memuat nol maka $Ker(f) \subseteq f^{-1}(Q)$. Berdasarkan Teorema 10, karena $f^{-1}(Q)$ adalah ideal prima lemah kiri maka $Q = f(f^{-1}(Q))$ adalah ideal prima lemah kiri dari S. □

Teorema 10 dan Akibat 11 mengatakan bahwa ideal kiri dari kodomain dapat menjadi ideal prima lemah jika epimorfisma f memenuhi suatu kondisi dan ada suatu ideal kiri dari domain yang merupakan ideal prima lemah. Teorema 12 dan Akibat 13 mengatakan arah sebaliknya. Ideal kiri dari domain dapat menjadi ideal prima lemah jika epimorfisma f memenuhi suatu kondisi dan ada suatu ideal kiri dari kodomain yang merupakan ideal prima lemah.

Teorema 12. Misalkan $f: R \to S$ adalah epimorfisma gelanggang, $Ker(f)$ adalah ideal prima dari R, dan P adalah ideal kiri dari R sedemikian sehingga $ker(f) \subseteq P$. Jika $f(P)$ adalah ideal prima lemah kiri dari S, maka P adalah ideal prima lemah kiri dari R.

Bukti. Misalkan $0 \neq AB \subseteq P$, dengan A dan B ideal-ideal kiri dari P. Perhatikan bahwa

$$f(A)f(B) = f(AB) \subseteq f(P).$$

Jika $f(A)f(B) \neq 0$ maka $f(A) \subseteq f(P)$ atau $f(B) \subseteq f(P)$. Dengan asumsi $ker(f) \subseteq P$ maka $A \subseteq P$ atau $B \subseteq P$. Jika $f(A)f(B) = 0$ maka $AB \subseteq Ker(f)$. Karena $Ker(f)$ ideal prima maka $A \subseteq Ker(f) \subseteq P$ atau $B \subseteq Ker(f) \subseteq P$. Dengan demikian, P ideal prima lemah kiri dari R. □

Akibat 13. Misalkan $f: R \to S$ adalah epimorfisma gelanggang dengan $Ker(f)$ adalah ideal prima. Jika Q adalah ideal prima lemah kiri dari S maka $f^{-1}(Q)$ adalah ideal prima lemah kiri dari R.

Bukti. Karena Q suatu ideal sehingga memuat nol maka $Ker(f) \subseteq f^{-1}(Q)$. Berdasarkan Teorema 12, karena $f(f^{-1}(Q)) = Q$ adalah ideal prima lemah kiri dari S maka $f^{-1}(Q)$ adalah ideal prima lemah kiri dari R. □

Teorema 10 dan Teorema 12 menunjukkan kepada kita bagaimana struktur prima lemah diwariskan dari suatu gelanggang ke gelanggang lainnya yang dihubungkan dengan epimorfisma gelanggang yang memenuhi suatu kondisi.

Gelanggang Prima Lemah Kiri Penuh

Definisi 14. Suatu gelanggang yang setiap ideal kirinya adalah ideal prima lemah disebut gelanggang prima lemah kiri penuh.

Selanjutnya penulis mendefinisikan suatu tipe gelanggang yang baru.

Definisi 14(a). Suatu gelanggang yang setiap ideal kiri sejatinya termuat di suatu ideal prima lemah sejati disebut gelanggang prima lemah kiri hampir penuh.

Teorema 15. Misalkan $f : R \to S$ suatu epimorfisma gelanggang. Jika R adalah gelanggang prima lemah kiri penuh, maka S adalah gelanggang prima lemah kiri penuh.

Bukti. Misalkan Q adalah ideal kiri dari S. Perhatikan bahwa $f(Ker\,(f)) = 0 \subseteq Q$. Akibatnya $Ker\,(f) \subseteq f^{-1}(Q)$. Berdasarkan Teorema 9, $f^{-1}(Q)$ adalah ideal kiri dari R. Berdasarkan asumsi, yaitu R adalah gelanggang prima lemah kiri penuh, maka $f^{-1}(Q)$ adalah ideal prima lemah kiri dari R. Berdasarkan Teorema 10 $f(f^{-1}(Q)) = Q$ adalah ideal prima lemah kiri dari S. Dengan demikian, S adalah gelanggang prima lemah kiri penuh. □

Teorema 16. Misalkan $f : R \to S$ adalah epimorfisma gelanggang sedemikian sehingga $Ker(f)$ adalah ideal prima dari R. Jika S adalah gelanggang prima lemah kiri penuh, maka R adalah gelanggang prima lemah kiri hampir penuh.

Bukti. Misalkan P adalah ideal kiri sejati dari R. Teorema 8 mengatakan $f(P)$ adalah ideal kiri dari S. Karena S suatu gelanggang prima lemah kiri penuh maka $f(P)$ adalah ideal prima lemah kiri penuh. Berdasarkan Akibat 13, $f^{-1}(f(P))$ adalah ideal prima lemah kiri dari R. Di sisi lain, $P \subseteq f^{-1}(f(P))$. Jadi setiap ideal kiri dari R termuat di suatu ideal prima lemah sejati. Dengan demikian, R adalah gelanggang prima lemah kiri hampir penuh. □

Pada Teorema 16, gelanggang R tidak bisa menjadi gelanggang prima lemah kiri penuh karena P belum tentu sama dengan $f^{-1}\big(f(P)\big)$.

Ideal Fraksi yang Merupakan Ideal Hampir Prima

Misalkan R suatu gelanggang dan I, J suatu ideal-deal dari R. Definisikan $(I{:}J) = \{x \in R \mid xJ \subseteq I\}$. Dapat dibuktikan bahwa impunan tersebut merupakan ideal kiri dari R yang selanjutnya disebut ideal fraksi. Hasil berikut merupakan hasil tambahan untuk ideal hampir prima. Di sini penulis menggunakan ideal dua sisi.

Teorema 17. Misalkan R suatu gelanggang dan I, J suatu ideal-ideal dari R . Jika I ideal hampir prima dari R dan $(I^2{:}J) \subseteq (I{:}J)^2$ maka $(I{:}J)$ ideal hampir prima dari R .

Bukti. Misalkan $AB \subseteq (I:J)$ dengan $A \nsubseteq (I:J)$ dan $B \nsubseteq (I:J)$. Akan dibuktikan bahwa $AB \subseteq (I:J)^2$.

Misalkan $a \in A \setminus (I:J)$ maka $\langle a \rangle B \subseteq AB \subseteq (I:J)$. Akibatnya, $\langle a \rangle BJ \subseteq I$. Perhatikan bahwa $\langle a \rangle \nsubseteq I$ karena jika $\langle a \rangle \subseteq I$ maka $a \in I$. Kontradiksi dengan $a \notin (I:J)$. Begitu juga, $BJ \nsubseteq I$ karena $B \nsubseteq (I:J)$. Selanjutnya, karena I ideal hampir prima maka $\langle a \rangle BJ \subseteq I^2$. Dengan demikian, $\langle a \rangle B \subseteq (I^2:J) \subseteq (I:J)^2$. Hal ini berlaku untuk sebarang $a \in A \setminus (I:J)$. Jadi, $\big(A \setminus (I:J)\big)B \subseteq (I:J)^2$.

Selanjutnya, misalkan $b \in B \setminus (I:J)$ maka $A\langle b \rangle \subseteq AB \subseteq (I:J)$. Jadi, $A\langle b \rangle J \subseteq I$. Perhatikan bahwa $A \nsubseteq I$ karena $A \nsubseteq (I:J)$. Begitu juga, $\langle b \rangle J \nsubseteq I$ karena $b \notin (I:J)$. Karena I ideal hampir prima maka $A\langle b \rangle J \subseteq I^2$. Dengan demikian, $A\langle b \rangle \subseteq (I^2:J) \subseteq (I:J)^2$. Hal ini berlaku untuk sebarang $b \in B \setminus (I:J)$. Jadi, $A(B \setminus (I:J)) \subseteq (I:J)^2$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} AB &= (A(I:J))B + (A \cap (I:J))(B \setminus (I:J)) + (A \cap (I:J))(B \cap (I:J)) \\ &\subseteq (A \setminus (I:J))B + A(B \setminus (I:J)) + (A \cap (I:J))(B \cap (I:J)) \\ &\subseteq (I:J)^2 \end{aligned}$$

□

Kesimpulan

Untuk sembarang pemetaan epimorfisma $f: R \to S$ jika R suatu gelanggang prima lemah kiri penuh maka S adalah gelanggang prima lemah kiri penuh. Sebaliknya, jika S suatu gelanggang prima lemah kiri penuh dan $Ker(f)$ adalah ideal prima dari R maka R adalah gelanggang prima lemah kiri hampir penuh.

Dari suatu ideal hampir prima I dapat diperoleh ideal hampir prima yang baru yaitu ideal $(I:J)$ dengan syarat $(I^2:J) \subseteq (I:J)$. Artinya, jika x yang memenuhi $xJ \subseteq I^2$ menyebabkan $x = \sum_i a_i b_i$ dengan $a_i J \subseteq I$ dan $b_i J \subseteq I$ maka $(I:J)$ adalah ideal hampir prima.

Masalah Terbuka

Pembaca dapat membawa konsep ideal prima lemah kiri ke submodul hampir prima kiri atau prima lemah kiri.

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Prof. Dr. Irawati, M.S. atas masukan dan diskusi-diskusi yang sangat mendukung penelitian ini.

Referensi

[1] A. Abouhalaka and Ş. Fındık, “Almost prime ideals in noncommutative rings,” *Serdica Mathematical Journal*, vol. 48, no. 4, pp. 235–246, 2022, doi: 10.55630/serdica.2022.48.235-246.

[2] Y. Hirano, E. Poon, and H. Tsutsui, “On rings in which every ideal is weakly prime,” *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, vol. 47, no. 5, pp. 1077–1087, 2010, doi: 10.4134/BKMS.2010.47.5.1077.

[3] A. E. Ashour and M. Hamoda, “Characterization of Weakly Primary Ideals over Non-commutative Rings,” *International Mathematical Forum*, vol. 9, no. 34, pp. 1659–1667, 2014.

[4] W. D. Blair and H. Tsutsui, “Fully prime rings,” *Commun Algebra*, vol. 22, no. 13, pp. 5389–5400, 1994, doi: 10.1080/00927879408825136.

[5] D. I. C. Mendes, “Fully * -prime rings with involution,” *Mathematica Pannonica*, vol. 26, no. 2, pp. 119–135, 2018.

[6] D. D. Anderson and M. Bataineh, “Generalizations of prime ideals,” *Commun Algebra*, vol. 36, no. 2, pp. 686–696, 2008, doi: 10.1080/00927870701724177.

[7] N. Groenewald, “Weakly prime and weakly completely prime ideals of noncommutative rings,” *International Electronic Journal of Algebra*, vol. 28, no. July, pp. 43–60, 2020, doi: 10.24330/ieja.768127.

[8] S. M. Bhatwadekar and P. K. Sharma, “Unique factorization and birth of almost primes,” *Commun Algebra*, vol. 33, no. 1, pp. 43–49, 2005, doi: 10.1081/AGB-200034161.

[9] T.-Y. Lam, *A First Course in Noncommutative Rings*, Second Edi. New York: Springer US, 2001.

[10] M. Shabir, “One-sided Prime Ideals in Semirings,” *KYUNGPOOK Math. J*, vol. 47, pp. 473–480, 2007.