Efektifitas Himpunan Bebas Linear dalam Menentukan Solusi Sistem Persamaan Linear di Ruang Norm-3

Esih Sukaesih[1, a)] dan T. Tutut Widiastuti[2, b)]

[1]*Jurusan Matematika FST UIN Sunan Gunung Djati Bandung*
[2]*Prodi Pengajaran Matematika FTarbiyah UIN Sunan Gunung Djati Bandung*

[a)]*esih_s@uinsgd.ac.id*
[b)] *widiastuti@uinsgd.ac.id*

Abstrak

Ruang norm-3 $(X, \|\cdot,\cdot,\cdot\|)$ didefinisikan sebagai ruang vektor X yang dilengkapi dengan norm-3 $\|\cdot,\cdot,\cdot\|$. Pada penelitian ini, diambil ruang vektor X dengan $\dim(X) = 5$ dan $\mathcal{A}$ adalah himpunan m vektor bebas linear di X, untuk $m = 3{,}4$, dan 5. Pada kondisi tersebut, dipelajari keefektifitasan himpunan bebas linear $\mathcal{A}$ dalam mendekati titik tetap dengan membandingkan galat pada setiap kondisi.

Kata kunci: ruang norm-3, terbatas relatif terhadap $\mathcal{A}$, ruang norm berdimensi hingga

Pendahuluan

Gähler, pada tahun 1964 [1], telah memperkenalkan kajian ruang norm-2. Kemudian Gähler juga memperumum ruang norm-2 menjadi ruang norm-n [2,3,4]. Gähler mendefinisikan ruang norm-n sebagai berikut.

Definisi 1 [2,3,4] Ruang norm-n didefinisikan sebagai ruang vektor real X (dimensi dari $X \geq n$) yang dilengkapi dengan pemetaan $\|\cdot, \dots, \cdot\|: X^n \to \mathbb{R}$, dan memenuhi:

- $\|x_1, \dots, x_n\| = 0$ jika dan hanya jika $x_1, \dots, x_n$ bergantung linear,
- $\|x_1, \dots, x_n\|$ invarian terhadap permutasi,
- $\|\alpha x_1, \dots, x_n\| = \alpha\|x_1, \dots, x_n\|$, untuk setiap $x_1, \dots, x_n \in X$ dan untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$,
- $\|x_1 + x, \dots, x_n\| \leq \|x_1, \dots, x_n\| + \|x, \dots, x_n\|$ untuk setiap $x, x_1, \dots, x_n \in X$.

Selanjutnya ruang vektor X yang dilengkapi dengan norm-n, $\|\cdot, \dots, \cdot\|$, disebut ruang norm-n dan dinotasikan $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$.

Selanjutnya kajian tentang norm-n banyak diteliti, diantaranya teorema titik tetap dengan norm-n di ruang ℓ^p yang diperkenalkan oleh Gunawan [6], dan Ekariani dkk. [7]. Begitu juga Burhan memperkenalkan teorema titik tetap di ruang norm-n berdimensi hingga, yakni :

Teorema 2 [8] Misal $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ adalah ruang norm-n yang lengkap relatif terhadap $\mathcal{A}$, himpunan n vektor bebas linear di X. Jika $T: X \to X$ adalah pemetaan kontraktif relatif terhadap $\mathcal{A}$, yakni terdapat $c \in (0,1)$ sehingga

$$\|Tx - Ty, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}\| \leq c\|x - y, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}\|$$

untuk setiap $x, y \in X$ dan $\{i_2, \dots, i_n\} \subset \{1, \dots, n\}$, maka T mempunyai tepat satu titik tetap di X.

Kemudian, Sukaesih menyatakan bahwa keterbatasan himpunan di ruang norm-n dapat ditentukan dengan $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_m\}$ dengan $m \geq n$, yakni:

Fakta 3 [9] Misalkan $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ adalah ruang norm-n, K adalah himpunan bagian tak kosong di X, dan $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_m\}$ adalah himpunan m vektor bebas linear di X dengan $m \geq n$. Himpunan K disebut himpunan terbatas relatif terhadap $\mathcal{A}$, jika terdapat $M > 0$ sehingga

$$\|x, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}\| \leq M$$

untuk setiap $x \in K$ dan untuk setiap $\{i_2, \dots, i_n\} \subset \{1, \dots, m\}$.

Hasil dan Diskusi

Fakta 3, bahwa himpunan bebas linear $\mathcal{A}$ untuk menunjukkan keterbatasan himpunan di ruang norm-n bisa berjumlah m dengan $n \leq m \leq \dim(X)$, akan diaplikasikan pada Teorema titik tetap di ruang norm-3 berdimensi 5 dengan mengambil beberapa himpunan bebas linear, yakni $\mathcal{A}$ untuk $m = 3,4,5$. Galat dari tiga bentuk himpunan bebas linear akan dibandingkan dan dipilih yang paling kecil galatnya.

Teorema 2 di atas akan diaplikasikan di ruang norm-3 berdimensi 5 dengan mengambil $\mathcal{A}$ untuk $m = 3,4,5$ sehingga diperoleh hasil berikut.

Akibat 4 Misal $(X, \|\cdot,\cdot,\cdot\|)$ adalah ruang norm-3 yang lengkap relatif terhadap $\mathcal{A}$ (untuk $n \leq m = \text{rank}(\mathcal{A}) \leq \dim(X)$) , himpunan m vektor bebas linear di X. Jika $T: X \to X$ adalah pemetaan kontraktif relatif terhadap $\mathcal{A}$, yakni terdapat $c \in (0,1)$ sehingga

$$\|Tx - Ty, a_{i_2}, a_{i_3}\| \leq c\|x - y, a_{i_2}, a_{i_3}\|$$

untuk setiap $x, y \in X$ dan $\{i_2, i_3\} \subset \{1, \dots, m\}$, maka T mempunyai tepat satu titik tetap di X.

Akibat 4 dibuktikan dengan cara yang sama pada Teorema titik tetap untuk pemetaan kontraktif relatif terhadap $\mathcal{A}$ di ruang norm-n [10].

Selanjutnya Akibat 4 akan digunakan untuk mengestimasi solusi suatu persamaan dan akan ditentukan galat dari estimasi solusi tersebut. Solusi dan galat solusi memenuhi algoritma berikut.

Pilih sembarang $x_0 \in X$ dan didefinisikan barisan iteratif (x_k) dengan

$$x_0, x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2 x_0, \dots, x_k = T^k x_0, \dots.$$

Barisan di atas merupakan barisan yang dibentuk pemetaan kontraktif T terhadap x_0.

Pemetaan T merupakan pemetaan yang kontraktif, sehingga memenuhi

$$\|Tx - Ty, a_{i_2}, a_{i_3}\| \leq c\|x - y, a_{i_2}, a_{i_3}\|$$

untuk suatu $c \in (0,1)$ dan untuk setiap $\{i_2, i_3\} \subset \{1, \dots, m\}$. Iterasi untuk setiap dua unsur barisan (x_k) yang berurutan diperoleh

$$\begin{aligned}
\|x_k - x_{k+1}, a_{i_2}, a_{i_3}\| &= \|Tx_{k-1} - Tx_k, a_{i_2}, a_{i_3}\| \\
&\leq c\|x_{k-1} - x_k, a_{i_2}, a_{i_3}\| \\
&= c\|Tx_{k-2} - Tx_{k-1}, a_{i_2}, a_{i_3}\| \\
&\leq c^2\|x_{k-2} - x_{k-1}, a_{i_2}, a_{i_3}\| \\
&\vdots \\
&\leq c^k\|x_0 - x_1, a_{i_2}, a_{i_3}\|
\end{aligned}$$

untuk setiap $\{i_2, i_3\} \subset \{1, \dots, m\}$. Selanjutnya, untuk $l > k$ dengan menggunakan pertidaksamaan segitiga diperoleh

$$\begin{aligned}
\|x_k - x_l, a_{i_2}, a_{i_3}\| &\leq \|x_k - x_{k+1}, a_{i_2}, a_{i_3}\| + \|x_{k+1} - x_{k+2}, a_{i_2}, a_{i_n}\| + \dots + \|x_{l-1} - x_l, a_{i_2}, a_{i_n}\| \qquad (1) \\
&\leq c^k\|x_0 - x_1, a_{i_2}, a_{i_3}\| + c^{k+1}\|x_0 - x_1, a_{i_2}, a_{i_3}\| + \dots + c^{l-1}\|x_0 - x_1, a_{i_2}, a_{i_3}\| \\
&= \left(c^k + c^{k+1} + \dots + c^{l-1}\right)\|x_0 - x_1, a_{i_2}, a_{i_3}\| \\
&= c^k\left(1 + c + c^2 + \dots + c^{l-k-1}\right)\|x_0 - x_1, a_{i_2}, a_{i_3}\| \\
&= c^k \tfrac{1-c^{l-k}}{1-c}\|x_0 - x_1, a_{i_2}, a_{i_3}\|,
\end{aligned}$$

untuk setiap $\{i_2, i_3\} \subset \{1, \dots, m\}$. Karena $0 < c < 1$ dan $1 - c^{l-k} < 1$ sehingga diperoleh

$$\|x_k - x_l, a_{i_2}, a_{i_3}\| < c^k \frac{1}{1-c} \|x_0 - x_1, a_{i_2}, a_{i_3}\|$$

untuk setiap $\{i_2, i_3\} \subset \{1, \dots, m\}$. Diketahui bahwa x_k konvergen ke x relatif terhadap $\mathcal{A}$, sehingga diperoleh

$$\|x_k - x, a_{i_2}, a_{i_3}\| < \frac{c^k}{1-c} \|x_0 - x_1, a_{i_2}, a_{i_3}\|$$

untuk setiap $\{i_2, i_3\} \subset \{1, \dots, m\}$. Galat solusi dihitung dengan persamaan

$$Gp_r(\|x_k - x, a_{i_2}, a_{i_3}\|) = \max\left\{\frac{c^k}{1-c}\|x_0 - x_1, a_{i_2}, a_{i_3}\|; \{i_2, i_3\} \subset \{1, \dots, m\}\right\}, \text{ dan} \quad (2)$$

$$\overline{Gp_r}(\|x_k - x, a_{i_2}, a_{i_3}\|) = \text{rataan}\left\{\frac{c^k}{1-c}\|x_0 - x_1, a_{i_2}, a_{i_3}\|; \{i_2, i_3\} \subset \{1, \dots, m\}\right\}, \quad (3)$$

yang selanjutnya disebut galat prior-3 maksimum relatif terhadap $\mathcal{A}$ dan galat prior-3 rataan kuadrat relatif terhadap $\mathcal{A}$.

Selanjutnya pada persamaan (5), diperoleh

$$\begin{aligned}\|x_k - x_l, a_{i_2}, a_{i_3}\| &\le \|x_k - x_{k+1}, a_{i_2}, a_{i_3}\| + \|x_{k+1} - x_{k+2}, a_{i_2}, a_{i_n}\| + \cdots + \|x_{l-1} - x_l, a_{i_2}, a_{i_n}\| \\ &\le c\|x_{k-1} - x_k, a_{i_2}, a_{i_3}\| + c\|x_k - x_{k+1}, a_{i_2}, a_{i_n}\| + \cdots + c\|x_{l-2} - x_{l-1}, a_{i_2}, a_{i_n}\| \\ &\le c\|x_{k-1} - x_k, a_{i_2}, a_{i_3}\| + c^2\|x_{k-1} - x_k, a_{i_2}, a_{i_n}\| + \cdots + c^{l-k}\|x_{k-1} - x_k, a_{i_2}, a_{i_n}\| \\ &\le (c + c^2 + \cdots + c^{l-k})\|x_{k-1} - x_k, a_{i_2}, a_{i_n}\| \\ &< \frac{c}{1-c}\|x_k - x_{k-1}, a_{i_2}, a_{i_3}\|,\end{aligned}$$

untuk setiap $\{i_2, i_3\} \subset \{1, \dots, m\}$. Karena x_k konvergen ke x relatif terhadap $\mathcal{A}$, sehingga diperoleh

$$\|x_k - x, a_{i_2}, a_{i_3}\| < \frac{c}{1-c}\|x_k - x_{k-1}, a_{i_2}, a_{i_3}\|$$

untuk setiap $\{i_2, i_3\} \subset \{1, \dots, m\}$. Galat solusi juga dapat dihitung dengan persamaan

$$Gp_o(\|x_k - x, a_{i_2}, a_{i_3}\|) = \max\left\{\frac{c}{1-c}\|x_k - x_{k-1}, a_{i_2}, a_{i_3}\|; \{i_2, i_3\} \subset \{1, \dots, m\}\right\}, \text{ atau} \quad (4)$$

$$\overline{Gp_o}(\|x_k - x, a_{i_2}, a_{i_3}\|) = \text{rataan}\left\{\frac{c}{1-c}\|x_k - x_{k-1}, a_{i_2}, a_{i_3}\|; \{i_2, i_3\} \subset \{1, \dots, m\}\right\}, \quad (5)$$

yang selanjutnya disebut galat posterior-3 maksimum relatif terhadap $\mathcal{A}$ dan galat posterior-3 rataan kuadrat relatif terhadap $\mathcal{A}$.

Berikut ini adalah contoh menentukan solusi (titik tetap) pada persamaan kubik dengan menggunakan algoritma diatas. Misalkan persamaan

$$x^3 - 7x + b = 0 \text{ dengan } b = (2,5,1,3,2)^T, x \in \mathbb{R}^5. \quad (6)$$

Solusi dari persamaan tersebut diestimasi melalui iterasi dengan asumsi pusat solusi di $(0.5,0.5,0.5,0.5,0.5)^T$ berjari-jari 0.5. Persamaan (6) ke dalam bentuk

$$x = \frac{x^3 + b}{7}.$$

Kemudian iterasi dilakukan pada persamaan berikut

$$x_i = \frac{x_{i-1}^3 + b}{7} \quad (7)$$

dengan mengambil $x_0 = (0.5,0.5,0.5,0.5,0.5)^T$, sehingga diperoleh barisan iterasi yang memenuhi persamaan (7)

$$x_0 = \begin{pmatrix}0.5\\0.5\\0.5\\0.5\\0.5\end{pmatrix}, x_1 = \begin{pmatrix}0.30357\\0.73214\\0.16071\\0.44643\\0.30357\end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix}0.28971\\0.77035\\0.14345\\0.44128\\0.28971\end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix}0.28919\\0.77035\\0.14328\\0.44085\\0.28919\end{pmatrix}, x_4 = \begin{pmatrix}0.28917\\0.78197\\0.14328\\0.44081\\0.28917\end{pmatrix},$$

$$x_5 = \begin{pmatrix}0.28917\\0.78259\\0.14328\\0.44081\\0.28917\end{pmatrix}, x_6 = \begin{pmatrix}0.28917\\0.78276\\0.14328\\0.44081\\0.28917\end{pmatrix}, x_7 = \begin{pmatrix}0.28917\\0.78280\\0.14328\\0.44081\\0.28917\end{pmatrix}, x_8 = \begin{pmatrix}0.28917\\0.78281\\0.14328\\0.44081\\0.28917\end{pmatrix}, x_9 = \begin{pmatrix}0.28917\\0.78281\\0.14328\\0.44081\\0.28917\end{pmatrix}$$

dan , $x_{10} = \begin{pmatrix} 0.28917 \\ 0.78281 \\ 0.14328 \\ 0.44081 \\ 0.28917 \end{pmatrix}$.

Hasil iterasi $x_0, \dots, x_{10}$ di hitung galat posterior dan galat priornya. Galat posterior-3 dan galat prior-3 akan dihitung relatif terhadap $\mathcal{A}_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$, relatif terlatif terhadap $\mathcal{A}_4 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, dan relatif terhadap $\mathcal{A}_5 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ dengan $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Galat akan dihitung dengan persamaan (2)-(5). Berikut ini merupakan tabel $\|x_j, a_{i_2}, a_{i_3}\|$ untuk $j = 1, \dots, 10$ dan $\{i_2, i_3\} \subset \{1, \dots, m\}$.

Tabel 1 $\|x_j - x_{j-1}, a_{i_2}, a_{i_3}\|$ untuk $j = 1, \dots, 10$ dan $\{i_2, i_3\} \subset \{1, \dots, m\}$.

Iterasi ke-j	$\|x_j - x_{j-1}, a_1, a_2\|$	$\|x_j - x_{j-1}, a_1, a_3\|$	$\|x_j - x_{j-1}, a_1, a_4\|$	$\|x_j - x_{j-1}, a_1, a_5\|$	$\|x_j - x_{j-1}, a_2, a_3\|$
1	0.39568	0.30877	0.45561	0.41458	0.28291
2	0.02273	0.04097	0.04416	0.04224	0.02027
3	0.00070	0.00927	0.00926	0.00925	0.00086
4	$4.08328 \cdot 10^{-5}$	0.00238	0.00237	0.00237	$4.49159 \cdot 10^{-5}$
5	$3.09155 \cdot 10^{-6}$	0.00062	0.00062	0.00062	$3.16388 \cdot 10^{-6}$
6	$2.52437 \cdot 10^{-7}$	0.00016	0.00016	0.00016	$2.53586 \cdot 10^{-7}$
7	$2.09438 \cdot 10^{-8}$	$4.28012 \cdot 10^{-5}$	$4.28012 \cdot 10^{-5}$	$4.28012 \cdot 10^{-5}$	$2.09616 \cdot 10^{-8}$
8	$1.74291 \cdot 10^{-9}$	$1.12398 \cdot 10^{-5}$	$1.12398 \cdot 10^{-5}$	$1.12398 \cdot 10^{-5}$	$1.74291 \cdot 10^{-9}$
9	$1.45124 \cdot 10^{-10}$	$2.95181 \cdot 10^{-6}$	$2.95181 \cdot 10^{-6}$	$2.95181 \cdot 10^{-6}$	$1.45124 \cdot 10^{-10}$
10	$1.20851 \cdot 10^{-11}$	$7.75226 \cdot 10^{-7}$	$7.75226 \cdot 10^{-7}$	$7.75226 \cdot 10^{-7}$	$1.20851 \cdot 10^{-11}$

Iterasi ke-j	$\|x_j - x_{j-1}, a_2, a_4\|$	$\|x_j - x_{j-1}, a_2, a_5\|$	$\|x_j - x_{j-1}, a_3, a_4\|$	$\|x_j - x_{j-1}, a_3, a_5\|$	$\|x_j - x_{j-1}, a_4, a_5\|$
1	0.43850	0.37585	0.28291	0.28291	0.45561
2	0.02612	0.02740	0.02027	0.02027	0.04416
3	0.00076	0.00920	0.00086	0.00085	0.00926
4	$2.65908 \cdot 10^{-5}$	0.00238	$4.49159 \cdot 10^{-5}$	$4.49159 \cdot 10^{-5}$	0.00238
5	$9.51543 \cdot 10^{-7}$	0.00062	$3.16388 \cdot 10^{-6}$	$3.16388 \cdot 10^{-6}$	0.00062
6	$3.40969 \cdot 10^{-8}$	0.00016	$2.53586 \cdot 10^{-7}$	$2.53586 \cdot 10^{-7}$	0.00016
7	$1.22191 \cdot 10^{-9}$	$4.28012 \cdot 10^{-5}$	$2.09616 \cdot 10^{-8}$	$2.09616 \cdot 10^{-8}$	$4.28012 \cdot 10^{-5}$
8	$4.37888 \cdot 10^{-11}$	$1.12398 \cdot 10^{-5}$	$1.74318 \cdot 10^{-9}$	$1.74318 \cdot 10^{-9}$	$1.12398 \cdot 10^{-5}$
9	$1.56913 \cdot 10^{-12}$	$2.95181 \cdot 10^{-6}$	$1.45129 \cdot 10^{-10}$	$1.45129 \cdot 10^{-10}$	$2.95181 \cdot 10^{-6}$
10	$5.68434 \cdot 10^{-14}$	$7.75226 \cdot 10^{-7}$	$1.20852 \cdot 10^{-11}$	$1.20852 \cdot 10^{-11}$	$7.75226 \cdot 10^{-7}$

Berdasarkan data pada Tabel 1, dihitung galat prior-3 relatif terhadap $\mathcal{A}$ dan galat posterior-3 relatif terhadap $\mathcal{A}$.

Table 2 Galat prior-3 maksimum relatif terhadap $\mathcal{A}$

Iterasi ke-j	Galat prior-3 maksimum relatif terhadap $\mathcal{A}_3$	Galat prior-3 maksimum relatif terhadap $\mathcal{A}_4$	Galat prior-3 maksimum relatif terhadap $\mathcal{A}_5$
1	0.06594	0.07594	0.07594
2	0.00942	0.01085	0.01085

3	0.00134	0.00155	0.00155
4	0.00019	0.00022	0.00022
5	$2.74669 \cdot 10^{-5}$	$3.16271 \cdot 10^{-5}$	$3.16271 \cdot 10^{-5}$
6	$3.92384 \cdot 10^{-6}$	$4.51815 \cdot 10^{-6}$	$4.51815 \cdot 10^{-6}$
7	$5.60549 \cdot 10^{-7}$	$6.45451 \cdot 10^{-7}$	$6.45451 \cdot 10^{-7}$
8	$8.00784 \cdot 10^{-8}$	$9.22072 \cdot 10^{-8}$	$9.22072 \cdot 10^{-8}$
9	$1.14398 \cdot 10^{-8}$	$1.31725 \cdot 10^{-8}$	$1.31725 \cdot 10^{-8}$
10	$1.63425 \cdot 10^{-9}$	$1.88178 \cdot 10^{-9}$	$1.88178 \cdot 10^{-9}$

Table 3 Galat posterior-3 maksimum relatif terhadap $\mathcal{A}$

Iterasi ke-j	Galat prior-3 maksimum relatif terhadap $\mathcal{A}_3$	Galat prior-3 maksimum relatif terhadap $\mathcal{A}_4$	Galat prior-3 maksimum relatif terhadap $\mathcal{A}_5$
1	0.06595	0.07594	0.07594
2	0.00683	0.00736	0.00736
3	0.00154	0.00154	0.00154
4	0.00039	0.00039	0.00039
5	0.00010	0.00010	0.00010
6	$2.71717 \cdot 10^{-5}$	$2.71717 \cdot 10^{-5}$	$2.71717 \cdot 10^{-5}$
7	$7.13353 \cdot 10^{-6}$	$7.13353 \cdot 10^{-6}$	$7.13353 \cdot 10^{-6}$
8	$1.87329 \cdot 10^{-6}$	$1.87329 \cdot 10^{-6}$	$1.87329 \cdot 10^{-6}$
9	$4.91969 \cdot 10^{-7}$	$4.91969 \cdot 10^{-7}$	$4.91969 \cdot 10^{-7}$
10	$1.29204 \cdot 10^{-7}$	$1.29204 \cdot 10^{-7}$	$1.29204 \cdot 10^{-7}$

Table 4 Galat prior-3 rataan kuadrat relatif terhadap $\mathcal{A}$

Iterasi ke-j	Galat prior-3 rataan kuadrat relatif terhadap $\mathcal{A}_3$	Galat prior-3 rataan kuadrat relatif terhadap $\mathcal{A}_4$	Galat prior-3 rataan kuadrat relatif terhadap $\mathcal{A}_5$
1	0.02326	0.02503	0.01981
2	0.00332	0.00357	0.00283
3	0.00047	0.00051	0.00040
4	$6.78308 \cdot 10^{-5}$	$7.297 \cdot 10^{-5}$	$5.77522 \cdot 10^{-5}$
5	$9.69011 \cdot 10^{-6}$	$1.04243 \cdot 10^{-5}$	$8.25031 \cdot 10^{-6}$
6	$1.3843 \cdot 10^{-6}$	$1.48918 \cdot 10^{-6}$	$1.17862 \cdot 10^{-6}$
7	$1.97757 \cdot 10^{-7}$	$2.12741 \cdot 10^{-7}$	$1.68374 \cdot 10^{-7}$
8	$2.8251 \cdot 10^{-8}$	$3.03915 \cdot 10^{-8}$	$2.40534 \cdot 10^{-8}$
9	$4.03586 \cdot 10^{-9}$	$4.34165 \cdot 10^{-9}$	$3.4362 \cdot 10^{-9}$
10	$5.76552 \cdot 10^{-10}$	$6.20235 \cdot 10^{-10}$	$4.90886 \cdot 10^{-10}$

Table 5 Galat posterior-3 rataan kuadrat relatif terhadap $\mathcal{A}$

Iterasi ke-j	Galat posterior-3 rataan kuadrat relatif terhadap $\mathcal{A}_3$	Galat posterior-3 rataan kuadrat relatif terhadap $\mathcal{A}_4$	Galat posterior-3 rataan kuadrat relatif terhadap $\mathcal{A}_5$
1	0.02326	0.02503	0.01981
2	0.00254	0.00209	0.00171
3	0.00052	0.00037	0.00037
4	0.00013	$9.34987 \cdot 10^{-5}$	$8.86835 \cdot 10^{-5}$
5	$3.45346 \cdot 10^{-5}$	$2.44197 \cdot 10^{-5}$	$2.31662 \cdot 10^{-5}$
6	$9.05726 \cdot 10^{-6}$	$6.40445 \cdot 10^{-6}$	$6.07579 \cdot 10^{-6}$
7	$2.37784 \cdot 10^{-6}$	$1.68139 \cdot 10^{-6}$	$1.59511 \cdot 10^{-6}$
8	$6.24431 \cdot 10^{-7}$	$4.4154 \cdot 10^{-7}$	$4.18881 \cdot 10^{-7}$
9	$1.6399 \cdot 10^{-7}$	$1.15958 \cdot 10^{-7}$	$1.10008 \cdot 10^{-7}$
10	$4.30681 \cdot 10^{-8}$	$3.04537 \cdot 10^{-8}$	$2.8891 \cdot 10^{-8}$

Perhatikan pada Tabel 2 sampai Tabel 5, terlihat bahwa galat prior-3 maksimum relatif terhadap $\mathcal{A}_3$ mempunyai nilai yang dekat dengan nilai galat prior-3 maksimum relatif terhadap $\mathcal{A}_4$ dan galat prior-3 maksimum relatif terhadap $\mathcal{A}_5$. Sedangkan galat prior-3 rataan kuadrat relatif terhadap $\mathcal{A}_3$, galat prior-3 rataan kuadrat relatif terhadap $\mathcal{A}_4$, dan galat prior-3 rataan kuadrat relatif terhadap $\mathcal{A}_5$ mempunyai nilai yang berbeda. Oleh karena itu, selanjutnya galat solusi dihitung dengan galat prior-3 maksimum relatif terhadap $\mathcal{A}$ (persamaan (2)). Perhatikan juga, bahwa galat posterior-3 maksimum relatif terhadap $\mathcal{A}_3$ mempunyai nilai yang dekat dengan nilai galat posterior-3 maksimum relatif terhadap $\mathcal{A}_4$ dan galat posterior-3 maksimum relatif terhadap $\mathcal{A}_5$. Sedangkan galat posterior-3 rataan kuadrat relatif terhadap $\mathcal{A}_3$, galat posterior-3 rataan kuadrat relatif terhadap $\mathcal{A}_4$, dan galat posterior-3 rataan kuadrat relatif terhadap $\mathcal{A}_5$ mempunyai nilai yang berbeda. Oleh karena itu, selanjutnya galat solusi dihitung dengan galat posterior-3 maksimum relatif terhadap $\mathcal{A}$ (persamaan (4)).

Jadi pada teorema titik tetap ruang norm-3, estimasi titik tetap mempunyai galat yang memenuhi akibat berikut ini.

Akibat 5 [Iterasi, batas galat pada ruang norm-3] Misal $(X, \|\cdot,\cdot,\cdot\|)$ adalah ruang norm-3 lengkap relatif terhadap $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_m\}$, himpunan m vektor bebas linear di X dengan $n \leq m \leq \dim(X)$, dan misal $T: X \to X$ adalah pemetaan kontraktif relatif terhadap $\mathcal{A}$. Misal untuk sebarang $x_0 \in X$ didefinisikan barisan (x_k) dengan

$$x_0, x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2 x_0, \dots, x_k = T^k x_0, \dots$$

konvergen relatif terhadap $\mathcal{A}$ ke tepat satu titik x di X dan memenuhi

$$\|x_k - x, a_{i_2}, a_{i_3}\| \leq \frac{c^k}{1-c} \|x_1 - x_0, a_{i_2}, a_{i_3}\|,$$

untuk setiap $\{i_2, i_3\} \subset \{1, \dots, m\}$, galat prior—3 (selanjutnya disebut estimasi prior-3) relatif terhadap $\mathcal{A}$ dan dihitung dengan persamaan

$$Gp_r(\|x_k - x, a_{i_2}, a_{i_3}\|) = \max\left\{\frac{c^k}{1-c} \|x_1 - x_0, a_{i_2}, a_{i_3}\|; \{i_2, i_3\} \subset \{1, \dots, m\}\right\}.$$

Estimasi galat dan estimasi galat posterior-3 (selanjutnya disebut estimasi posterior-3) memenuhi

$$\|x_k - x, a_{i_2}, a_{i_3}\| \leq \frac{c}{1-c} \|x_k - x_{k-1}, a_{i_2}, a_{i_3}\|,$$

untuk setiap $\{i_2, i_3\} \subset \{1, \dots, m\}$ dan dihitung dengan persamaan

$$Gp_o(\|x_k - x, a_{i_2}, a_{i_3}\|) = \max\left\{\frac{c}{1-c} \|x_k - x_{k-1}, a_{i_2}, a_{i_3}\|; \{i_2, i_3\} \subset \{1, \dots, m\}\right\}.$$

Bukti dari Akibat 5 telah dibuktikan pada algoritma menentukan galat di atas.

Kesimpulan

Pada penelitian ini diaplikasikan Teorema Titik Tetap di ruang norm-3, yakni teorema titik tetap untuk pemetaan kontraktif relatif terhadap $\mathcal{A}$, dengan memilih tiga himpunan bebas linear yakni $\mathcal{A}_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\mathcal{A}_4 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, dan $\mathcal{A}_5 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$. Teorema titik tetap diaplikasikan untuk mengestimasi titik tetap dari persamaan $x^3 - 7x + b = 0$ dengan $b = (2; 5; 1; 3; 2)^T$. Titik tetap persamaan diestimasi sampai iterasi ke 10, yakni $x_{10} = (0.28917,\ 0.78282,\ 0.14328,\ 0.44081,\ 0.28917)^T$. Pada setiap hasil iterasi dihitung nilai galat-3 terlihat, bahwa galat prior-3 maksimum relatif terhadap $\mathcal{A}_4$ atau galat prior-3 maksimum relatif terhadap $\mathcal{A}_5$ mempunyai nilai yang mirip dengan galat prior-3 maksimum relatif terhadap $\mathcal{A}_3$. Begitu juga, galat posterior-3 maksimum relatif terhadap $\mathcal{A}_4$ atau galat posterior-3 maksimum relatif terhadap $\mathcal{A}_5$ mempunyai nilai yang mirip dengan galat posterior-3 maksimum relatif terhadap $\mathcal{A}_3$.

Burhan [8] menunjukkan hubungan topologi di ruang norm-n melalui ekuivalensi di ruang norm berdimensi finite. Kemudian Sukaesih [11] menunjukkan hubungan keterbatasan relatif terhadap $\mathcal{A}$ di ruang norm-n berdimensi finite, untuk $\mathcal{A}$ yang berbeda. Namun Sukaesih [11] tidak menunjukkan jika suatu himpunan terbatas relatif terhadap $\mathcal{A}_1$ maka himpunan tersebut terbatas relatif terhadap $\mathcal{A}_2$, untuk rank($\mathcal{A}_1$) < rank($\mathcal{A}_2$). Berdasarkan hasil penelitian ini, diharapkan dapat ditunjukkan hubungan topologi ruang norm-n relatif terhadap $\mathcal{A}_1$ (atau keterbatasan di ruang norm-n relatif terhadap $\mathcal{A}_1$) mengakibatkan topologi yang sama di ruang norm-n relatif terhadap $\mathcal{A}_2$ (atau keterbatasan di ruang norm-n relatif terhadap $\mathcal{A}_2$), , untuk rank($\mathcal{A}_1$) < rank($\mathcal{A}_2$), tanpa ekuivalensi di ruang norm berdimensi finite.

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada LP2M UIN Sunan Gunung Djati yang telah mendanai penelitian ini pada tahun anggaran 2017.

Referensi

[1] S. Gähler, "Lineare 2-normierte Räume", Math. Nachr, 28, 1-43, 1964.

[2] S. Gähler, "Untersuchungen Uber Verallgemeinerte m-Metrische Räume I, Math. Nachr, 40, 165-189, 1969.

[3] S. Gähler, "Untersuchungen Uber Verallgemeinerte m-Metrische Räume II", Math. Nachr, 40, 229-264, 1969.

[4] S. Gähler, "Untersuchungen Uber Verallgemeinerte m-Metrische Räume III", Math. Nachr, 41, 23-26, 1970.

[5] A. Misiak, "n-Inner product spaces", Math. Nachr., 140, 299-319, 1989.

[6] H. Gunawan, "The space of p-summable sequences and its natural n-norm", Bull. Ausral. Math. Soc., 64, 137-147, 2001.

[7] S. Ekariani, H. Gunawan, and M. Idris, "A contractive mapping theorem on the n-normed space of p-summable sequence", JMA, 4(1), 1-7, 2013.

[8] M. J. I. Burhan, Ruang Norm-n Berdimensi Hingga, Tesis Institut Teknologi Bandung, Bandung, Indonesia, 2011.

[9] E. Sukaesih, Teorema Pemetaan Kontraktif pada Himpunan Terbatas di Ruang Norm-n, Disertasi Institut Teknologi Bandung, Bandung, Indonesia, 2017.

[10] H. Gunawan, O. Neswan, dan E. Sukaesih, "Fixed point theorems on bounded sets in an n-normed space", JMA, 6(3), 51-58, 2015.

[11] E. Sukaesih, "Boundedness in finite dimensional n-normed spaces", ICMIs's Proceeding, will be published.