Modifikasi Metode Runge Kutta Orde 4 Bentuk Kutta dengan Rata – Rata Geometri

Irma Suryani [1a], Roni [1b], Wartono [1c], dan Yuslenita Muda [1d]

[1]*Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau*
Jalan Subrantas Km 15,5 Pekanbaru, Indonesia 28293

[a]*email: irma.suryani@uin-suska.ac.id*
[c]*email: wartono@uin-suska.ac.id*
[d] *email: yuslenita.muda@uin-suska.ac.id*

Abstrak

Penelitian ini membahas modifikasi metode Runge Kutta orde-4 Kutta berdasarkan rata-rata geometri (RKKuG) dengan bentuk umum $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4}\left(\sqrt{k_1k_2} + 2\sqrt{k_2k_3} + \sqrt{k_3k_4}\right)$. Ekspansi deret Taylor orde empat terhadap k_1, k_2, k_3 and k_4 memunculkan enam parameter real $q_{11}, q_{21}, q_{22}, q_{31}, q_{32}$ dan q_{33}. Modifikasi metode RK-4 Kutta (RKKuG) diperoleh dengan mensubstitusi nilai parameter $q_{11}, q_{21}, q_{22}, q_{31}, q_{32}$ dan q_{33} ke bentuk umum. Selanjutnya, galat pemotongan dari RKKuG diperoleh dengan membandingkan antara ekspansi deret Taylor orde lima y^*_{i+1}. dengan y_{i+1}. Simulasi numerik diberikan untuk menguji galat RKKuG dengan menggunakan dua contoh kasus persamaan diferensial orde satu. Selanjutnya, hasil numerik dibandingan dengan dua metode eksplisit lainnya, yaitu metode Runge-Kutta orde empat klasik (RKK) dan modifikasi metode Runge-Kutta Klasik berdasarkan rata-rata kontra-harmonik (RKKCH). Berdasarkan hasil kajian diperoleh bahwa secara umum galat RKKuG cukup kompetitif dibandingkan dengan metode eksplisit lainnya.

Kata kunci: deret taylor, persamaan diferensial orde satu, rata-rata geometri, metode Runge-Kutta Orde empat Kutta.

Abstract

In this paper, we modify fourth-order Runge-Kutta Kutta method based on the geometric mean with the form $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4}\left(\sqrt{k_1k_2} + 2\sqrt{k_2k_3} + \sqrt{k_3k_4}\right)$. *We consider the fourth-order Taylor expansion of* $k_1, k_2, k_3,$ *and* k_4 *raise six real parameters* $q_{11}, q_{21}, q_{22}, q_{31}, q_{32},$ *and* q_{33} *We obtain a modification of the fourth-order Runge-Kutta Kutta method based on the geometric mean by substituting the above parameters into its general form. Moreover, its cutting error is obtained by comparing Taylor's expansion of the fifth-order series* y^*_{i+1} *with* y_{i+1}. *Numerical simulation is given to verify the error of geometric mean using first-order differential equation's example. Furthermore, We compare the numerical result with the classical fourth-order Runge-Kutta method and modification of the classical Runge-Kutta method based on the contra-harmonic mean. The numerical results show that the performance of the new method is competitive enough compared by other explicit methods.*

Keywords: Taylor's series, first order differential equation, geometric means, fourth order Runge-Kutta method.

Pendahuluan

Persamaan diferensial merupakan representasi matematis dari persoalan-persoalan bidang sains, teknik dan rekayasa yang melibatkan perubahan beberapa variabel terhadap variabel lainnya. Penyelesaian persamaan diferensial dapat ditentukan jika diberikan syarat awal, sehingga persamaan diferensial sepertia ini bisanya disebut persoalan nilai awal dengan bentuk umum sebagai berikut:

$$y' = f(x, y), \; a \le x \le b \tag{1}$$

dengan nilai awal $y(x_0) = y_0$.

Pada keadaan yang sebenarnya, Persamaan (1) yang kompleks dan rumit sangat susah untuk diselesaikan dengan menggunakan teknik analitik untuk menghasilkan solusi eksak. Oleh karena itu, pada beberapa kasus, persamaan diferensial (1) diselesaikan menggunakan metode numerik dengan solusi berupa nilai hampiran [1].

Salah satu metode numerik yang sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial (1) adalah metode Runge-Kutta. Oleh karena akurasi yang dihasilkan cukup baik, metode Runge-Kutta orde empat (RK-4) telah banyak diimplementasikan untuk menyelesaikan berbagai bentuk persamaan diferensial, seperti : sistem induksi magnetik dan sistem persamaan Navier-Stokes [2], jaringan syarat tiruan [3], sistem mangsa-pemangsa [4], dan persamaan Schrodinger [5].

Metode RK-4 ini memiliki berbagai bentuk tergantung pada pemilihan parameter bebasnya. Terdapat dua bentuk metode Runge-Kutta orde empat (RK-4) yang banyak digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial, yaitu metode RK-4 klasik dan RK-4 Kutta yang masing-masing yang ditulis

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \tag{2}$$

dan

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4). \tag{3}$$

Untuk mencari bentuk baru dari metode RK-4, beberapa peneliti telah memodifikasi RK-4 Klasik menggunakan berbagai jenis rata-rata, seperti rata-rata geometri [6], rata-rata harmonik [7], rata-rata kontra-harmonik [8], rata-rata heronian [9], rata-rata Lehmer [10], dan rata-rata pangkat [11]. Selain itu, beberapa peneliti juga memodifikasi metode RK-4 klasik menggunakan kombinasi dari beberapa rata-rata, seperti: kombinasi rata-rata aritmetik-geometri [12], kombinasi rata-rata aritmetik-centroidal [13], dan kombinasi linear rata-rata aritmetik-harmonik-geometri [14].

Selain metode RK-4 klasik, metode RK-4 Kutta juga telah di modifikasi oleh beberapa peneliti. Salah satunya adalah Wartono dkk [16] yang memodifikasi metode RK-4 Kutta menggunakan rata-rata harmonik dalam bentuk

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(\frac{k_1\,k_2}{k_1+k_2} + 2\frac{k_2\,k_3}{k_2+k_3} + \frac{k_3\,k_4}{k_3+k_4}\right). \tag{4}$$

Pada penelitian ini, penulis memodifikasi bentuk metode Runge-Kutta orde-4 Kutta dengan menggunakan rata-rata geometri. Selanjutnya, untuk menguji performa metode baru, diberikan simulasi numerik dengan menggunakan dua persamaan diferensial. Pada simulasi ini, metode baru diimplementasikan untuk menyelesaikan dua persamaan diferensial tersebut, dan galat yang dihasilkan dibandingkan dengan dua metode lainnya.

Hasil dan Diskusi

Untuk mengkonstruksi modifikasi metode RK-4 Kutta, perhatikan kembali bentuk umum RK-4 Kutta yang diberikan pada Persamaan (3) dalam bentuk rumusan baru yang mengandung unsur aritmatik sebagai berikut

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4}\left(\frac{k_1+k_2}{2} + \frac{k_2+k_3}{2} + \frac{k_2+k_3}{2} + \frac{k_3+k_4}{2}\right). \tag{5}$$

Persamaan (5) adalah metode RK-4 Kutta berdasarkan rata-rata aritmatik dengan $\frac{k_i+k_{i+1}}{2}$ adalah rata-rata aritmatik untuk dua variabel. Kemudian substitusikan bentuk rata-rata aritmatik tersebut dengan rata-rata geometri $\sqrt{k_i k_{i+1}}$, $i = 1,2,3$ sehingga Persamaan (5) dapat ditulis dalam bentuk

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4}\left(\sqrt{k_1k_2} + \sqrt{k_2k_3} + \sqrt{k_2k_3} + \sqrt{k_3k_4}\ \right), \tag{6}$$

atau dapat disederhanakan menjadi :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4}\left(\sqrt{k_1k_2} + 2\sqrt{k_2k_3} + \sqrt{k_3k_4}\right), \tag{7}$$

dengan

$$\begin{aligned} k_1 &= f(y_i) = hf\ , \\ k_2 &= f(y_i + hq_{11}k_1), \\ k_3 &= f\big(y_i + h(q_{21}k_1 + q_{22}k_2)\big), \\ k_4 &= f\big(y_i + h(q_{31}k_1 + q_{32}k_2 + q_{33}k_3)\big). \end{aligned} \tag{8}$$

Bentuk $\sqrt{k_i k_{i+1}}$ didefinisikan sebagai rata-rata geometri, sehingga Persamaan (7) dikenal sebagai modifikasi metode RK-4 Kutta berdasarkan rata-rata geometri.

Untuk mendapatkan rumusan yang dicari maka perlu ditentukan terlebih dahulu nilai $q_{11}, q_{21}, q_{22}, q_{31}, q_{32}$ dan q_{33}. Dengan mengekspansi Persamaan (8) menggunakan deret Taylor orde empat, maka diperoleh nilai k_1, k_2, k_3dan k_4 .

Untuk menghindari adanya polinomial dalam bentuk akar, digunakan ekspansi deret binomial pada metode RK-4 Kutta umum sampai suku ke x^4 sebagai berikut :

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{128}x^4.$$

Pertama, nyatakan $\sqrt{k_i k_{i+1}}$ ke dalam bentuk deret Binomial $(1+x)^{\frac{1}{2}}$, dengan memisalkan

$$x = \frac{k_i k_{i+1}}{f^2} - 1\ ; i = 1,2,3. \tag{9}$$

Untuk nilai $i = 1$, maka diperoleh $x = \frac{k_1k_2}{f^2} - 1$. Kemudian substitusikan nilai-nilai k_1 dan k_2 yang telah diperoleh ke Persamaan (9). Pada langkah selanjutnya, substitusikan nilai *x* pada Persamaan (9) ke dalam deret binomial maka diperoleh $\sqrt{k_1k_2}$ dalam bentuk polinomial berikut:

$$\sqrt{k_1k_2} = f + h\left(\frac{q_{11}ff_y}{2}\right) + h^2\left(\frac{q_{11}^2\left(2f^2f_{yy} - ff_y^2\right)}{8}\right)$$
$$+h^3\left(\frac{q_{11}^3\left(4f^3f_{yyy} - 6f^2f_yf_{yy} - 3ff_y^3\right)}{48}\right)$$
$$+h^4\left(\frac{q_{11}^4f^4f_{yyyy}}{48} - \frac{q_{11}^4f^3f_yf_{yyy}}{24} - \frac{q_{11}^4f^3f_{yy}^2}{32} + \frac{3q_{11}^4f^2f_{yy}f_y^2}{32}\right.$$
$$\left.-\frac{5q_{11}^4ff_y^4}{128}\right), \tag{10}$$

$$\sqrt{k_2k_3} = f + h\left(\frac{(q_{11}+A)ff_y}{2}\right) + h^2\left(\frac{(q_{11}^2+A^2)f^2f_{yy}}{4} - \frac{(21A^2+21q_{11}^2)ff_y^2}{128}\right.$$
$$\left.+\frac{54q_{11}q_{22}ff_y^2}{64}\right) + h^3\left(\frac{(q_{11}^3+A^3)f^3f_{yyy}}{12} + \frac{(q_{11}^3+A^3)ff_y^3}{16}\right)$$
$$+h^4\left(\frac{3q_{11}^4f^2f_y^2f_{yy}}{32} - \frac{7q_{11}^4f^3f_yf_{yyy}}{128} - \frac{21q_{22}^4f^3f_{yy}^2}{512} - \frac{21q_{22}^4f^3f_{yy}^2}{512}\right.$$
$$\left.-\frac{21q_{22}^4f^3f_{yy}^2}{512} + \cdots\right), \tag{11}$$

$$\sqrt{k_3k_4} = f + h\left(\frac{Aff_y}{2} + \frac{Bff_y}{2}\right)$$
$$+h^2\left(-\frac{A^2ff_y^2}{8} - \frac{B^2ff_y^2}{8} + \frac{3q_{22}q_{33}ff_y^2}{4} + \frac{q_{31}q_{32}f^2f_{yy}}{2} + \frac{q_{31}q_{33}f^2f_{yy}}{2}\right.$$
$$\left.+\frac{q_{32}q_{33}f^2f_{yy}}{2} + \cdots\right) + h^3\left(\frac{q_{21}^3ff_y^3}{16} + \frac{q_{22}^3ff_y^3}{16} + \frac{3q_{21}^2q_{22}ff_y^3}{16}\right.$$
$$\left.+\frac{3q_{22}^2q_{21}ff_y^3}{16} + \frac{q_{31}^3ff_y^3}{16} + \frac{q_{32}^3ff_y^3}{16} + \frac{A^3f^3f_{yyy}}{12} + \frac{B^3f^3f_{yyy}}{12} + \cdots\right)$$
$$+h^4\left(-\frac{A^4ff_y^4}{128} - \frac{B^4ff_y^4}{128} + \cdots\right). \tag{12}$$

Kemudian substitusikan nilai-nilai pada ruas kanan $\sqrt{k_1k_2}$, $\sqrt{k_2k_3}$ dan $\sqrt{k_3k_4}$ yang telah diperoleh pada persamaan (10), (11) dan (12) ke metode RK-4 Kutta dengan geometri pada Persamaan (7) dan selanjutnya bandingkan dengan bentuk Taylor. Selanjutnya dengan membandingkan koefisien-koefisien h^n diperoleh:

$$h^2ff_y: \tfrac{1}{8}(3q_{11} + 3A + B) = \tfrac{1}{2},$$
$$h^3ff_y^2 : \tfrac{1}{8}(q_{11}(3q_{22} + A + q_{32}) + q_{33}A) + \tfrac{1}{32}(2AB - 3A^2 - 3q_{11}^2 - B^2) = \tfrac{1}{6},$$
$$h^3f^2f_{yy} : \tfrac{1}{16}(3A + 3q_{11}^2 + B^2) = \tfrac{1}{6},$$
$$h^4f^3f_{yyy} : \tfrac{1}{48}(3A^2 + B^2 + 3q_{11}^3) = \tfrac{1}{24},$$

$$h^4 f f_y^3 : \frac{1}{64}(3q_{11}^3 - 2A^2 q_{11} + 8q_{11}^2 q_{22} - 2q_{11}^2 A - 12Aq_{22}q_{11}) + \frac{1}{64}(B^3 - B^2 A - A^2 B + 3A^3 - 4ABq_{33} + 4A^2 q_{32}) + \frac{1}{64}(8q_{11}q_{22}q_{33} - 4Bq_{32}q_{11} + 4Bq_{22}q_{11} + 4Aq_{11}q_{32}) = \frac{1}{24},$$

$$h^4 f^2 f_y f_{yy} : \frac{1}{32}(A^2 B - 3A^3 - B^3 + 2A^2 q_{33} + 4ABq_{33} + 2Aq_{11}^2 + 2q_{11}^2 q_{32}) + \frac{1}{32}(q_{11}(2A^2 - 3q_{11}^2 + 6q_{11}q_{22} + 12Aq_{22} + 4Bq_{32})) = \frac{1}{6}.$$

Untuk memudahkan mendapatkan nilai parameternya, dilakukan penyederhanaan terlebih dahulu dengan mengambil nilai $A = 2/3$ dan $B = 1$, maka didapatlah nilai parameternya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} q_{11} &= \frac{1}{3}, \\ q_{21} &= \frac{13}{36} - \frac{\sqrt{793}}{36}, \\ q_{22} &= \frac{11}{36} + \frac{\sqrt{793}}{36}, \\ q_{31} &= -\frac{11}{3} + \frac{\sqrt{793}}{6}, \\ q_{32} &= \frac{71}{12} - \frac{\sqrt{793}}{4}, \\ q_{33} &= -\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{793}}{12}. \end{aligned} \tag{13}$$

Langkah terakhir yaitu mensubstitusikan semua nilai parameter yang telah didapat (13) ke dalam Persamaan (7), maka diperoleh modifikasi metode RK-4 Kutta berdasarkan rata-rata geometri berikut ini,

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4}\left(\sqrt{k_1 k_2} + 2\sqrt{k_2 k_3} + \sqrt{k_3 k_4}\right), \tag{14}$$

dengan

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i), \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{h}{3}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{2h}{3}, y_i + h\left(\left(\frac{13 - \sqrt{793}}{36}\right) k_1 + \left(\frac{11 + \sqrt{793}}{36}\right) k_2\right)\right), \\ k_4 &= f\left(x_i + h, y_i + h\left(\left(\frac{-22 + \sqrt{793}}{6}\right) k_1 + \left(\frac{71 - 3\sqrt{793}}{12}\right) k_2 + \left(\frac{-15 + \sqrt{793}}{12}\right) k_3\right)\right). \end{aligned}$$

Galat Metode RK-4 Kutta Berdasarkan Rata-rata Geometri

Untuk mendapatkan galat dari metode RK-4 Kutta berdasarkan rata-rata geometri dilakukan dengan menggunakan langkah-langkah yang sama untuk menentukan nilai parameter dalam mendapatkan rumusan metode RK-4 Kutta berdasarkan rata-rata geometri yang telah dibahas sebelumnya.

Nilai parameter $q_{11}, q_{21,}q_{22}, q_{31}, q_{32}$ dan q_{33} yang telah disubstitusikan ke dalam Persamaan (8) akan menghasilkan nilai-nilai k_1, k_2, k_3 dan k_4 pada Persamaan (14). Nilai-nilai k_1, k_2, k_3 dan k_4 inilah yang kemudian diekspansikan kedalam deret Taylor sampai h^5. Kemudian dengan prosedur yang sama pada persamaan (10) – (12) maka diperoleh :

$$y_{i+1} = y_i + hf + \frac{h^2}{2} f f_y + \frac{h^3}{6}\left(f {f_y}^2 + f^2 f_{yy}\right) + \frac{h^4}{24}\left(f^3 f_{yyy} + 4f^2 f_y f_{yy} + f f_y^3\right)$$
$$+h^5 \left(\tfrac{11}{1296} f^4 f_{yyyy} + \left(\tfrac{-467737+16709\sqrt{793}}{31104}\right) f^3 f_y f_{yyy} + \left(\tfrac{-33+5\sqrt{793}}{5184}\right) f^3 f_{yy}^2 + \right.$$
$$\left. \left(\tfrac{-6563+443\sqrt{793}}{31104}\right) f^2 f_y^2 f_{yy} + \left(\tfrac{59\sqrt{793}-2000}{31104}\right) f f_y^4\right) \tag{15}$$

Kemudian bandingkan hasil (14) dengan ekspansi Taylor dari y_{i+1} disekitar $x = x_n$ sampai h^5, berikut ini :

$$y_{i+1} = y_i + hf + \frac{h^2}{2} f f_y + \frac{h^3}{6}\left(f {f_y}^2 + f^2 f_{yy}\right) + \frac{h^4}{24}\left(f^3 f_{yyy} + 4f^2 f_y f_{yy} + f f_y^3\right)$$
$$+h^5 \left(\tfrac{f^4 f_{yyyy} + 7f^3 f_{yy}^2 + 11 f^2 f_y^2 f_{yy} + f f_y^4}{120}\right) \tag{16}$$

Dengan membandingkan hasil (14) dan (15) sehingga diperoleh galat metode RK-4 Kutta berdasarkan rata-rata geometri sebagai berikut :

$$\text{Galat} = h^5 \left(-\frac{1}{6480} f^4 f_{yyyy} - \left(\frac{-2347757 + 83545\sqrt{793}}{155520}\right) f^3 f_y f_{yyy}\right.$$
$$- \left(\frac{-33 + 5\sqrt{793}}{5184}\right) f^3 f_{yy}^2 - \left(\frac{-47071 + 2215\sqrt{793}}{155520}\right) f^2 f_y^2 f_{yy}$$
$$\left. - \left(\frac{-11296 + 295\sqrt{793}}{155520}\right) f f_y^4 \right.$$

atau dapat ditulis sebagai :

$$\text{Galat} = \frac{h^5}{155520}\left(-24 f^4 f_{yyyy} - \left(83545\sqrt{793} - 2347757\right) f^3 f_y f_{yyy}\right.$$
$$-\left(150\sqrt{793} - 990\right) f^3 f_{yy}^2 - \left(2215\sqrt{793} - 47071\right) f^2 f_y^2 f_{yy}$$
$$-\left(295\sqrt{793} - 11296\right) f f_y^4. \tag{17}$$

Simulasi Numerik

Untuk menguji performa dari modifikasi metode RK-4 Kutta, maka dilakukan simulasi numerik dengan mengimplementasikan modifikasi metode RK-4 Kutta berdasarkan rata-rata geometri menggunakan dua persamaan diferensial. Galat yang dihasilkan dari RK-4 Kutta berdasarkan rata-rata geometri (RKKuG) akan dibandingkan dengan metode RK-4 Klasik (RKK) dan metode RK-4 klasik berdasarkan rata-rata kontra harmonik (RKKCH).

Kasus 1

$$y' = \frac{1}{y'},\ y(0) = 1,$$

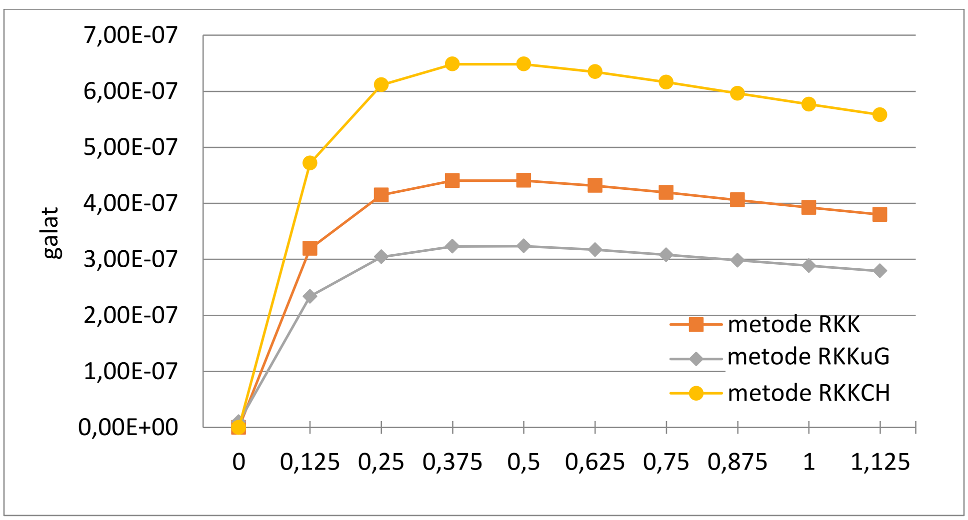
dengan solusi eksak $Y = \sqrt{2x+1}$ pada interval $0 \le x \le 1{,}25$ dengan $n = 10$.

Perbandingan galat yang dihasilkan dari RKK, RKKuG dan RKKCH menggunakan persamaan diferensial $y' = 1/y$ diberikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Perbandingan galat RKK, RKKuG, RKKCH dengan h = 0,125

i	X	Y (solusi eksak)	galat		
			RKK	RKKuG	RKKCH
1	0,000	1,0000000000	0,000000E+00	0,0000000000	0,0000000000
2	0,125	1,1180339887	3,193602E-07	2,339650E-07	4,715722E-07
3	0,250	1,2247448714	4,148485E-07	3,043332E-07	6,114496E-07
4	0,375	1,3228756555	4,403539E-07	3,233058E-07	6,483103E-07
5	0,500	1,4142135624	4,407862E-07	3,237886E-07	6,484746E-07
6	0,625	1,5000000000	4,317287E-07	3,172421E-07	6,348393E-07
7	0,750	1,5811388301	4,192312E-07	3,081299E-07	6,162534E-07
8	0,875	1,6583123952	4,058093E-07	2,983136E-07	5,963793E-07
9	1,000	1,7320508076	3,925393E-07	2,885929E-07	5,767754E-07
10	1,125	1,8027756377	3,798719E-07	2,793045E-07	5,580886E-07

Nilai-nilai pada Tabel Tabel 1 diplot dalam bentuk grafik yang ditunjukkan pada Gambar 1



Gambar 1 Perbandingan galat metode RKK, RKKuG dan RKKCH dengan h = 0,125 pada kasus 1

Berdasarkan Gambar 1 diperlihatkan bahwa modifikasi metode Runge-Kutta orde empat klasik menggunakan rata-rata geometri yang diberikan pada Persamaan (14) memiliki galat yang lebih kecil dibandingkan dengan metode lainnya.

Kasus 2

$$y' = y - x^2 + 1,\ y(0) = 0.5,$$

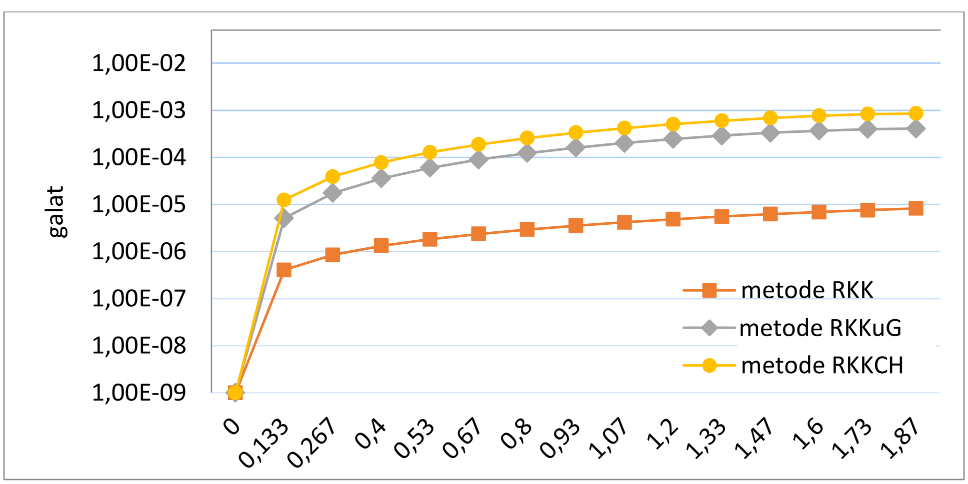
dengan solusi eksak $Y = (x+1)^2 - 0.5e^x$ pada interval $0 \leq x \leq 2$ dengan $n = 15$.

Perbandingan galat yang dihasilkan dari RKK, RKKuG dan RKKCH menggunakan persamaan diferensial $y' = y - x^2 + 1$ diberikan pada Tabel 2 berikut.

Tabel 2. Perbandingan galat RKK, RKKuG, RKKCH dengan h = 0,133.

i	X	Y (solusi eksak)	galat		
			RKK	RKKuG	RKKCH
1	0,00	0,5000000000	0	0	0
2	0,133	0,7131290385	4,057162E-07	5,102927E-06	1,238558E-05
3	0,27	0,9516418584	8,436890E-07	1,735384E-05	3,880567E-05
4	0,40	1,2140876512	1,314866E-06	3,581809E-05	7,748345E-05
5	0,53	1,4988086784	1,819810E-06	5,984583E-05	1,271927E-04
6	0,67	1,8039107573	2,358568E-06	8,891961E-05	1,869635E-04
7	0,80	2,1272295358	2,930512E-06	1,225450E-04	2,558719E-04
8	0,93	2,4662919589	3,534150E-06	1,601554E-04	3,328556E-04
9	1,07	2,8182722377	4,166887E-06	2,010119E-04	4,165210E-04
10	1,20	3,1799415386	4,824744E-06	2,440815E-04	5,049085E-04
11	1,33	3,5476104971	5,502015E-06	2,878743E-04	5,951779E-04
12	1,47	3,9170635314	6,190853E-06	3,302099E-04	6,831587E-04
13	1,60	4,2834837878	6,880783E-06	3,678654E-04	7,626707E-04
14	1,73	4,6413673811	7,558099E-06	3,960166E-04	8,244485E-04
15	1,87	4,9844254024	8,205172E-06	4,072982E-04	8,543333E-04

Nilai-nilai galat pada Tabel 2 diplot dalam bentuk grafik yang diberikan pada Gambar 2 berikut.



Gambar 2 Perbandingan galat metode RKK, RKKuG dan RKKCH dengan h = 0,133 untuk kasus 2

Berdasarkan Gambar 2 diperlihatkan bahwa galat yang dihasil oleh metode RKKuG berada di antara metode RKK dan metode RKKCH. Hal ini menujukkan bahwa, modifikasi metode RK-4 Kutta menggunakan rata-rata geometri lebih baik dibandingkan dengan modifikasi metode RK-4 klasik menggunakan rata-rata kontra harmonik, namun tidak lebih baik dibandingkan dengan metode RK-4 klasiknya.

Kesimpulan

Modifikasi metode RK-4 Kutta telah sukses di kontruksi menggunakan rata-rata geometri dengan galat pemotongan yang diberikan oleh

$$\text{galat} = \frac{h^5}{155520}\big(-24f^4 f_{yyyy} - \big(83545\sqrt{793} - 2347757\big)\, f^3 f_y f_{yyy} \; - \big(150\sqrt{793} - 990\big) f^3 f_{yy}^2$$

$$-\big(2215\sqrt{793} - 47071\big)\, f^2 f_y^2 f_{yy} - \big(295\sqrt{793} - 11296\big)\, f f_y^4.$$

Pada simulasi numerik, diberikan dua contoh kasus persamaan diferensial. Galat yang dihasilkan oleh metode RKKuG dibandingkan dengan dua metode lainnya, yaitu metode RKK dan metode RKKCH. Tabel 1 dan 2 memperlihatkan perbandingan galat antara metode RKKuG dengan metode RKK dan RKKCH. Pada Tabel 1, galat metode RKKuG lebih baik dibandingkan dengan metode RKK dan RKKCH, sedangkan Tabel 2, galat metode RKK lebih baik dibandingkan dengan metode RKKuG.

Referensi

[1] R. L. Burden, dan J. D. Faires, ”Numerical Analysis”, Penerbit Cengage Learning, Boston, 2011. pp. 259 – 264.

[2] H. Liu, dan J. Zou, ”Some new additive Runge-Kutta methods and their applications”, Journal of Computational and Applied Mathematics, 190: 74 – 98, 2006.

[3] R. Ponalagusamy, dan S. Senthikumar, ”Investigation on multilayer raster cellular neural network by arithmetic and heronian mean”, Procceding of the World Congress on Engineering 2007, July 2- 4, London, UK, Pp.713-718.

[4] Q. Wang, dan M. Z. Liu, ”Stability and Neimark-Sacker bifurcation in Runge-Kutta methods for a predator-prey system”, International Journal of Computer Mathematics, 86(12): 2218 – 2224, 2009.

[5] A. A. Malawi, A. Binesh, dan H. Arabshahi, ”Application of Runge-Kutta nmerical methods to solve the Scrodinger equation for hydrogen and positronium atoms”, Research Journal of Applied Sciences, 5(5) : 315 – 319, 2010.

[6] D. J. Evans, ”A new 4th order Runge-Kutta method for initial value problem with error control”, International Journal of Computer Mathematics, 39: 217 – 227, 1991.

[7] B. B. Sanugi, dan D. J. Evans, ” A new fourth order Runge-Kutta formula based on the harmonic mean”, International Journal of Computer Mathematics, 50: 113 – 118, 1994.

[8] D. J. Evans, dan A. R. Yaakub, ”A new fourth order Runge-Kutta formula based on the contra-harmonic (C_0M) mean”, International Journal of Computer Mathematics, 57: 249 – 256, 1995.

[9] D. J. Evans, dan N. Yaacob, ”A fourth order Runge-Kutta mehod based on the heronian mean formula”, International Journal of Computer Mathematics, 58: 103 – 115, 1995.

[10] F. Ulfa, dan Wartono, ”Modifikasi metode Runge-Kutta orde empat klasik menggunakan kombinasi deret Lehmer dengan p = 1 dan p = 4”, Prosiding Seminar MIPA dan Kesehatan 2019, 22 Agustus, Pekanbaru, Indonesia, pp. 7 – 15.

[11] Y. Muda, W. Wartono, dan H. Sarah, ”A new fourth-order Runge-Kutta method based on the power mean”, Proceedings of the 34th International Business Information Management Association Conference 2019 (43th IBIMA 2019), 13 – 14 November, Madrid, Spain, pp. 5640 – 5648.

[12] A. Wazwaz, ”Modified numerical methods based on arithmetic and geometric mean”, Applied Mathematics Letter, 4(3): 49 – 52, 1991.

[13] K. Murugesan, D. P. Dhayabaran, E. C. H. Amirtharaj, dan D. J. Evans, ” A fourth order embedded Runge-Kutta RKACeM(4,4) method based on arithmetic and centroidal means with error control”, International Journal of Computer Mathematics, 79(2): 247 – 269, 2002.

[14] B. F. Etin-Osa, ”A new 4th order hybrid Runge-Kutta methods for solving initial value problems (IVPs)”, Pure and Applied Mathematiacs Journal, 7(6): 78 – 87, 2018.

[15] Wartono, E. Putri, M. Soleh, I. Suryani, dan Aprijon, ”Modifikasi metode Runge-Kutta orde empat bentuk Kutta menggunakan rataan harmonik”, Prosiding Seminar Nasional Teknologi Informasi Komunikasi dan Industri XI 2019 (SNTIKI XI 2019), 12 November, Pekanbaru, Indonesia, pp. 433 – 438.