

Analisis Kestabilan Lokal Titik Ekuilibrium Model Dinamik Kebiasaan Merokok

Joko Harianto^{1, a)}, Mira Aprilia Marcus^{1, b)} dan Jonner Nainggolan^{1, c)}

¹Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Cenderawasih, Jayapura Provinsi Papua

^{a)}email: joharijpr88@gmail.com

^{b)}email: marcusmiraapriliana@gmail.com

^{c)}email: jonn_cesil@yahoo.co.id

Abstrak

Kebiasaan merokok dapat dipandang seperti penyakit menular sehingga sebarannya perlu dipelajari untuk membantu mengurangi jumlah perokok. Dinamika kebiasaan merokok dalam artikel ini dianalisis dengan pendekatan model epidemiologi. Lingkungan perokok dibagi menjadi empat populasi, yaitu populasi P (*Potential*) menyatakan populasi dari individu-individu yang tidak merokok, populasi L (*Light*) menyatakan populasi dari perokok ringan, populasi S (*Smokers*) menyatakan populasi dari perokok berat, populasi Q_t menyatakan populasi dari individu-individu yang berhenti merokok sementara dan populasi Q_p menyatakan populasi dari individu-individu yang berhenti merokok secara permanen. Model $PLSQ_tQ_p$ tersebut dimodifikasi dengan menambahkan asumsi bahwa seorang perokok yang berhenti sementara dapat berhenti secara permanen karena diberikan konseling dan pendekatan secara psikis yang maksimal. Kemudian model tersebut dianalisis titik ekuilibriumnya. Langkah pertama, ditentukan titik ekuilibrium bebas rokok. Langkah kedua, ditentukan titik ekuilibrium kebiasaan merokok. Langkah ketiga, ditentukan *the smoking generation number* (R_0) dengan menggunakan *next generation matrix* yang melibatkan radius spektral. Langkah terakhir, kestabilan lokal setiap titik ekuilibrium pada modelnya dianalisis. Ada dua tolak ukur yang digunakan untuk syarat eksistensi titik ekuilibrium dengan kebiasaan merokok yang ringan dan berat. *Smoking generation number* digunakan sebagai tolak ukur untuk kondisi kebiasaan merokok tingkat ringan sedangkan *heavy smoking generation number* digunakan untuk kondisi kebiasaan merokok tingkat berat. Hasil analisis menunjukkan bahwa titik ekuilibrium bebas rokok stabil asimtotik lokal saat nilai *the smoking generation number* kurang dari satu. Sebaliknya, jika nilai *the smoking generation number* lebih dari satu dan $\beta_1(\mu + \gamma)$ lebih dari $\beta_2(\beta_1 - \mu)$, maka titik ekuilibrium perokok ringan stabil asimtotik lokal. Sedangkan titik ekuilibrium perokok berat stabil asimtotik lokal jika nilai *the heavy smoking generation number* lebih dari satu. Kemudian dilakukan simulasi numerik menggunakan *software maple* untuk mengecek hasil analisis kestabilan lokal titik ekuilibrium tersebut.

Kata kunci: stabil asimtotik lokal, bebas rokok, perokok berat.

Abstract

The smoking habit can be viewed as an infectious disease so its spread needs to be studied to help reduce the number of smokers. The dynamics of smoking habits in this article are analyzed by the approach of epidemiologic models. The smoker's environment is divided into four populations. There are population P (Potential) represents the population of individuals who do not smoke; the population of L (Light) represents a population of mild smokers. The population S (Smokers) represents the population of smokers heavily; the population of Q_t represents the population of individuals who quit smoking temporarily. The population of Q_p represents populations of individuals who quit smoking permanently. The $PLSQ_tQ_p$ model is modified by adding the assumption that a smoker who temporarily stops can quit permanently because he is given the maximum psychological counseling and approach. Then the model is analyzed for its equilibrium point. The second determined the equilibrium point of the smoking habit. The third step, determined by the smoking generation number (R_0), uses the next generation matrix, which involves a spectral radius. The final step, the local stability of each equilibrium point on its model, is analyzed. There are two thresholds used to condition an equilibrium point with light and heavy smoking habits. The smoking generation number is used as the threshold for light smoking habits, while the heavy smoking generation number is used for heavy smoking habits. The results of the analysis show that the non-smoking equilibrium point is stable asymptotic locally when the value of the Smoking Generation Number is less than one. Conversely, if the value of the smoking generation number is more than one and $\beta_1(\mu + \gamma)$ more than $\beta_2(\beta_1 - \mu)$, then the point of the equilibrium light smoker is locally asymptotically stable. While the point of equilibrium heavy smoker is locally asymptotically stable if the value of the heavy smoking generation number more than one. It then performed a numerical simulation using the maple software to check the local stability analysis results of the equilibrium point.

Keywords: locally asymptotically stable, free smoker, heavy smoker.

Pendahuluan

Merokok merupakan kebiasaan seseorang yang sering dijumpai dalam masyarakat. Bahaya merokok sebagian besar telah diketahui oleh masyarakat, namun faktanya merokok masih tetap menjadi suatu kebiasaan yang lazim di masyarakat. Orang yang menghisap rokok awalnya merasa tidak nyaman, misalnya kepala pening, mulut kering dan bau. Menghisap rokok jika diteruskan berulang kali dan dibiasakan maka lama kelamaan perokok akan merasakan kenikmatan. Orang tersebut kemudian menjadi kecanduan baik secara fisik maupun psikis. Seorang perokok bisa menjadi kecanduan dikarenakan terdapat bahan kimia di dalam rokok. Salah satu kandungan dalam rokok adalah nikotin. Nikotin berasal dari daun tembakau, sehingga dapat membuat perokok menjadi kecanduan. Kandungan yang terdapat di dalamnya menyebabkan perokok merasa rileks [1].

Lebih dari 5 juta orang per tahun meninggal dunia karena konsumsi tembakau. Tahun 2020 diproyeksikan sekitar 10 juta orang akan meninggal dunia karena konsumsi tembakau. Jumlah perokok di Asia didominasi oleh kaum laki-laki sebesar 700 juta. Jumlah perokok di dunia diperkirakan oleh WHO sekitar 1,1 miliar orang yang berumur 15 tahun ke atas. Jumlah tersebut merupakan sepertiga dari total penduduk dunia [1].

Jumlah perokok aktif di Indonesia sebesar 34% pada Tahun 2008. Jumlah tersebut menjadikan Indonesia urutan ketiga jumlah perokok aktif terbanyak setelah Cina dan India. Jumlah perokok terus

mengalami kenaikan. Pada tahun 2010 jumlah perokok aktif sebesar 34,7%. Bahaya rokok sering diabaikan menjadi salah satu penyebab jumlah perokok terus meningkat. Rokok hingga saat ini mengandung sekitar 4.800 bahan kimia dengan komponen utama diantaranya tar, nikotin dan karbon monoksida (CO) [2].

Peningkatan jumlah perokok aktif tentu saja meningkatkan jumlah penderita penyakit akibat dari rokok. Oleh karena itu, perlu dicari solusi dari permasalahan ini. Konstruksi model matematika merupakan salah satu cara untuk memprediksi jumlah perokok aktif di waktu yang akan datang, sehingga dinamika dari jumlah perokok dapat diamati.

Secara umum pemodelan matematika merupakan suatu usaha untuk menciptakan tiruan dari suatu peristiwa alam maupun sosial ke dalam bahasa matematika. Model matematika dapat digunakan untuk memahami penyebaran kebiasaan merokok dan memprediksi jumlah perokok di masyarakat untuk membantu mengurangi jumlah perokok. Model dalam artikel [3], mempresentasikan model epidemiologi umum untuk menggambarkan dinamika penggunaan tembakau. Mereka juga mempertimbangkan pengaruh tekanan teman sebaya, konseling dan pengobatan. Dalam artikel [3], masyarakat dibagi menjadi populasi non-perokok, perokok dan yang berhenti merokok. Kemudian, model matematika tersebut dimodifikasi dalam artikel Sharomi. Mereka memperkenalkan populasi baru Q_t , yaitu populasi perokok yang berhenti sementara. Mereka menyimpulkan bahwa titik ekuilibrium bebas rokok stabil asimtotik lokal jika nilai *the smoking generation number* kurang dari satu dan tidak stabil jika lebih dari satu. Kemudian, dalam artikel [4] membuktikan kestabilan global titik ekuilibrium perokok berat dari model matematika yang dikembangkan oleh Sharomi dan Gumel dalam artikel [5]. Artikel [6] dan [7] menganalisis model dinamika kebiasaan merokok dengan mempertimbangkan populasi perokok berhenti sementara dan kemudian model tersebut diperluas dengan asumsi orang yang berhenti merokok permanen dapat kembali menjadi perokok berhenti sementara. Artikel [8] memperkenalkan turunan fraksional ke dalam model dan mempelajarinya secara numerik. Kemudian, artikel [9] membahas modifikasi model dengan mengubah interaksi antara perokok berat dan perokok berhenti sementara menjadi persamaan yang melibatkan akar kuadrat. Selanjutnya, artikel [10] mempresentasikan dinamika kebiasaan merokok yang dipelajari menggunakan simulasi Brute Force untuk dinamika jangka pendek dan analisis bifurkasi untuk dinamika jangka panjang. Artikel [11] mengadopsi model yang dikembangkan dalam [4] dan [5] dengan mempertimbangkan efek tekanan teman sebaya pada perokok yang berhenti sementara. Selanjutnya, artikel [12] memperkenalkan satu populasi baru, yaitu L yang merupakan populasi dari perokok ringan. Model dalam artikel [12] diasumsikan bahwa seorang perokok yang berhenti sementara tidak dapat menjadikannya berhenti secara permanen. Mereka membahas analisis kestabilan lokal dan global titik ekuilibrium model $PLSQ_tQ_p$ dan menunjukkan simulasi numeriknya. Dalam artikel ini, dibahas kembali model $PLSQ_tQ_p$ yang dipelajari dalam artikel [12] dengan menambahkan asumsi bahwa seorang perokok yang berhenti sementara dapat berhenti secara permanen karena diberikan konseling dan pendekatan secara psikis yang maksimal. Model yang dimodifikasi ini kemudian dianalisis kestabilan titik ekuilibriumnya dan digambarkan simulasi numeriknya untuk mendukung hasil analisis yang diperoleh.

Metode

Kajian ini dilakukan dengan metode studi pustaka. Referensi yang digunakan berupa beberapa buku dan jurnal ilmiah internasional bereputasi. Teori-teori yang digunakan untuk mendukung hasil kajian ini

adalah teori kestabilan titik ekuilibrium sistem persamaan diferensial biasa yang diuraikan dalam buku [13] dan teori terkait konstruksi *the basic reproduction number* suatu model epidemiologi dalam artikel [14]. Alur pemikiran dalam pembahasan ini, yaitu pertama menambahkan asumsi pada model yang telah dipelajari, kemudian membentuk model. Selanjutnya, menentukan titik ekuilibrium sistem dan menganalisis kestabilannya. Terakhir, diberikan simulasi numerik untuk memeriksa kebenaran hasil analisis yang diperoleh.

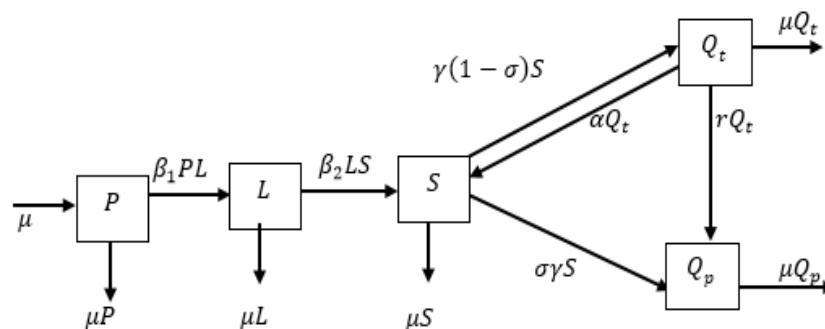
Hasil dan Diskusi

Penduduk dalam pembahasan ini dibagi menjadi lima 5 kelas, yaitu : kelas berpotensi untuk merokok (P), kelas perokok ringan (L), kelas perokok berat (S), kelas perokok berhenti sementara (Q_t) dan kelas perokok berhenti secara permanen (Q_p). Ukuran setiap kelas dalam satuan proporsi dengan jumlah total populasi awal sebesar 1. $P(t)$ menyatakan proporsi kelas berpotensi untuk merokok pada saat t , $L(t)$ menyatakan proporsi kelas perokok ringan pada saat t , $S(t)$ menyatakan proporsi kelas perokok berat pada saat t , $Q_t(t)$ menyatakan proporsi kelas perokok yang berhenti sementara pada saat t , dan $Q_p(t)$ menyatakan proporsi kelas perokok yang berhenti secara permanen pada saat t . Selanjutnya $P(t)$, $L(t)$, $S(t)$, $Q_t(t)$ dan $Q_p(t)$ dapat ditulis P , L , S , Q_t , Q_p .

Pembentukan model dinamika kebiasaan merokok melibatkan asumsi-asumsi dan hubungan antar variabel terkait permasalahan yang dibahas. Asumsi-asumsi dalam model ini diadopsi dari model yang dipelajari dalam artikel [12] namun ada asumsi yang ditambahkan. Berikut ini merupakan asumsi yang diperjelas dan ditambahkan pada model $PLSQ_tQ_p$.

1. Populasi bersifat tertutup, artinya bahwa penambahan atau pengurangan jumlah perokok melalui emigrasi dan imigrasi diabaikan.
2. Terjadi kematian alami pada semua kelas dengan laju yang sama dan konstan.
3. Perokok yang berhenti sementara dapat berhenti secara permanen dengan pendekatan secara psikis berupa konseling.

Secara skematik dinamika kebiasaan merokok disajikan dalam diagram pada Gambar 1 berikut ini.



Gambar 1 Diagram skematik dinamika kebiasaan merokok

Model $PLSQ_tQ_p$ berdasarkan asumsi yang ditambahkan adalah sebagai berikut:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \mu - \mu P - \beta_1 PL \\ \frac{dL}{dt} &= \beta_1 PL - \mu L - \beta_2 LS \\ \frac{dS}{dt} &= \beta_2 LS + \alpha Q_t - (\mu + \gamma)S \\ \frac{dQ_t}{dt} &= (1 - \sigma)\gamma S - (\alpha + \mu + r)Q_t \\ \frac{dQ_p}{dt} &= \sigma\gamma S + rQ_t - \mu Q_p \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

dengan $P > 0, L \geq 0, S \geq 0, Q_t \geq 0$ dan $Q_p \geq 0$. Parameter μ menyatakan laju kelahiran/kematian, β_1 laju kontak antara orang-orang yang berpotensi merokok dengan orang-orang yang kebiasaan merokoknya ditingkat sedang, β_2 menyatakan laju kontak orang-orang kebiasaan merokok tingkat sedang dengan orang-orang kebiasaan merokok tingkat berat, γ menyatakan laju menurunnya kebiasaan merokok tingkat berat menjadi berhenti merokok sementara, α menyatakan laju kebiasaan merokok sementara menjadi kebiasaan merokok tingkat berat. Parameter $1 - \sigma$ menyatakan proporsi kebiasaan merokok tingkat berat menjadi berhenti merokok sementara. σ menyatakan laju perubahan kebiasaan merokok tingkat berat menjadi berhenti merokok secara permanen, r menyatakan laju berhentinya kebiasaan merokok karena adanya konseling.

Jika $L = 0$, maka diperoleh titik ekuilibrium bebas rokok, yaitu $E_0(1,0,0,0,0)$ dan jika $L \neq 0$, tetapi $S = 0$, maka diperoleh titik ekuilibrium perokok sedang, yaitu $E_1\left(\frac{\mu}{\beta_1}, \frac{\beta_1 - \mu}{\beta_1}, 0,0,0\right)$. Jika $L \neq 0$ dan $S \neq 0$, maka titik ekuilibrium perokok berat, yaitu :

$E_2(P_2, L_2, S_2, Q_{t2}, Q_{p2})$, dengan

$$P_2 = \frac{\mu\beta_2(\alpha + \mu + r)}{\alpha\gamma\sigma\beta_1 + \alpha\mu(\beta_1 + \beta_2) + \gamma\beta_1(r + \mu) + r\mu(\beta_1 + \beta_2) + \mu^2(\beta_1 + \beta_2)} \quad (2)$$

$$L_2 = \frac{\alpha\gamma\sigma + \alpha\mu + \gamma r + \gamma\mu + r\mu + \mu^2}{\beta_2(\alpha + \mu + r)} \quad (3)$$

$$S_2 = \frac{\mu}{\beta_2} \left(\frac{\beta_1\beta_2(\alpha + \mu + r)}{\alpha\gamma\sigma\beta_1 + \alpha\mu(\beta_1 + \beta_2) + \gamma\beta_1(r + \mu) + r\mu(\beta_1 + \beta_2) + \mu^2(\beta_1 + \beta_2)} - 1 \right) \quad (4)$$

$$Q_{t2} = \frac{(1 - \sigma)\gamma S_2}{(\alpha + \mu + r)} \quad (5)$$

$$Q_{p2} = \frac{\gamma S_2(\alpha\sigma + \mu\sigma + r)}{\mu(\alpha + \mu + r)} \quad (6)$$

Dengan menggunakan metode *next generation matrix* yang dipelajari dalam artikel [14] diperoleh *the Smoking Generation Number* sebagai berikut:

$$R_0 = \frac{\beta_1}{\mu} \quad (7)$$

Dengan memperhatikan eksistensi titik ekuilibrium E_2 dengan S_2 haruslah bernilai positif, sehingga didefinisikan *the Heavy Smoking Generation Number* sebagai berikut:

$$R_1 = \frac{\beta_1 \beta_2 (\alpha + \mu + r)}{\alpha \gamma \sigma \beta_1 + \alpha \mu (\beta_1 + \beta_2) + \gamma \beta_1 (r + \mu) + r \mu (\beta_1 + \beta_2) + \mu^2 (\beta_1 + \beta_2)} \quad (8)$$

Hal yang melatar belakangi konstruksi R_1 adalah adanya syarat bahwa proporsi setiap kelas dalam populasi didefinisikan bernilai positif. Nilai R_1 selanjutnya digunakan sebagai salah satu syarat ambang batas eksistensi titik ekuilibrium pada Sistem (1). Berdasarkan uraian di atas dapat disimpulkan bahwa selalu ada titik ekuilibrium bebas rokok $E_0(1,0,0,0,0)$ pada Sistem (1) berapapun nilai R_0 dan R_1 . Lebih lanjut, eksistensi titik ekuilibrium pada Sistem (1) jika dikaitkan dengan nilai dari R_0 dan R_1 dapat dibagi menjadi 3 kasus sebagai berikut:

- (i) Jika $R_0 = 1$ dan
 - a) $R_1 = 1$, maka hanya terdapat satu titik ekuilibrium Sistem (1), yaitu $E_0(1,0,0,0,0)$
 - b) $R_1 > 1$, maka terdapat dua titik ekuilibrium Sistem (1), yaitu $E_0(1,0,0,0,0)$ dan $E_2(P_2, L_2, S_2, Q_{t2}, Q_{p2})$.
 - c) $R_1 < 1$, maka hanya terdapat satu titik ekuilibrium Sistem (1), yaitu $E_0(1,0,0,0,0)$
- (ii) Jika $R_0 > 1$ dan
 - a) $R_1 = 1$, maka terdapat dua titik ekuilibrium Sistem (1), yaitu $E_0(1,0,0,0,0)$ dan $E_1\left(\frac{\mu}{\beta_1}, \frac{\beta_1 - \mu}{\beta_1}, 0, 0, 0\right)$.
 - b) $R_1 > 1$, maka terdapat tiga titik ekuilibrium Sistem (1), yaitu $E_0(1,0,0,0,0)$, $E_1\left(\frac{\mu}{\beta_1}, \frac{\beta_1 - \mu}{\beta_1}, 0, 0, 0\right)$ dan $E_2(P_2, L_2, S_2, Q_{t2}, Q_{p2})$.
 - c) $R_1 < 1$, maka terdapat dua titik ekuilibrium Sistem (1), yaitu $E_0(1,0,0,0,0)$ dan $E_1\left(\frac{\mu}{\beta_1}, \frac{\beta_1 - \mu}{\beta_1}, 0, 0, 0\right)$.
- (iii) Jika $R_0 < 1$ dan
 - a) $R_1 = 1$, maka hanya terdapat satu titik ekuilibrium Sistem (1), yaitu $E_0(1,0,0,0,0)$.
 - b) $R_1 > 1$, maka hanya terdapat satu titik ekuilibrium Sistem (1), yaitu $E_0(1,0,0,0,0)$, dan $E_2(P_2, L_2, S_2, Q_{t2}, Q_{p2})$.
 - c) $R_1 < 1$, maka hanya terdapat satu titik ekuilibrium Sistem (1), yaitu $E_0(1,0,0,0,0)$.

Hasil dari analisis kestabilan lokal titik ekuilibrium bebas rokok dan endemik disajikan dalam teorema-teorema berikut ini.

- (i) Jika $R_0 < 1$, maka titik ekuilibrium bebas rokok E_0 dari Sistem (1) stabil asimtotik lokal. Sebaliknya, Jika $R_0 > 1$, maka titik ekuilibrium bebas rokok E_0 dari Sistem (1) tidak stabil.

Bukti:

Matriks Jacobian di E_0 adalah:

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu & -\beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 - \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\mu + \gamma) & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \sigma)\gamma & -(\alpha + \mu + r) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma\gamma & r & -\mu \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik dari $J(E_0)$ sebagai berikut:

$$(\lambda + \mu)^2 (\lambda - \beta_1 + \mu) (\lambda^2 + (\alpha + 2\mu + r + \gamma)\lambda + \mu^2 + \mu\alpha + \mu\gamma + \mu r + r\gamma + \alpha\gamma + \alpha\gamma(1 - \sigma)) = 0$$

sehingga diperoleh

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\mu < 0$$

$$\lambda_3 = \beta_1 - \mu < 0 \text{ jika } R_0 < 1$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, $(\lambda + \mu)^2(\lambda - \beta_1 + \mu)(\lambda^2 + (\alpha + 2\mu + r + \gamma)\lambda + \mu^2 + \mu\alpha + \mu\gamma + \mu r + r\gamma + \alpha\gamma + \alpha\gamma(1 - \sigma)) = 0$ memiliki dua akar real negatif atau imajiner dengan bagian real negatif. Jadi, menurut [13] terbukti bahwa jika $R_0 < 1$, maka titik ekuilibrium E_0 stabil asimtotik lokal. Sebaliknya, jika $R_0 > 1$ maka $\lambda_3 > 0$ akibatnya titik ekuilibrium E_0 tidak stabil.

(ii) Titik ekuilibrium E_1 dari Sistem (1) stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$ dan $\beta_1(\mu + \gamma) > \beta_2(\beta_1 - \mu)$.

Bukti.

Matriks Jacobian dari $J(E_1)$ adalah

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} -\beta_1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 - \mu & 0 & -\beta_2 \left(\frac{\beta_1 - \mu}{\beta_1} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 \left(\frac{\beta_1 - \mu}{\beta_1} \right) - (\mu + \gamma) & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \sigma)\gamma & -(\alpha + \mu + r) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma\gamma & r & -\mu \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik dari $J(E_1)$ sebagai berikut

$$(\lambda + \mu)(\lambda^2 + \beta_1\lambda + \mu(\beta_1 - \mu))(\lambda^2 + (a + b)\lambda + ab - \alpha\gamma(1 - \sigma)) = 0$$

dengan

$$a = \mu + \gamma - \beta_2 \left(\frac{\beta_1 - \mu}{\beta_1} \right) \\ b = \alpha + \mu + r > 0$$

Sehingga diperoleh $\lambda_1 = -\mu < 0$. Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, semua nilai eigen dari $\lambda^2 + \beta_1\lambda + \mu(\beta_1 - \mu) = 0$ bernilai negatif jika $R_0 < 1$. Sedangkan, nilai eigen dari $\lambda^2 + (a + b)\lambda + ab - \alpha\gamma(1 - \sigma) = 0$ bernilai negatif jika $a > 0$. Jelas bahwa $a > 0$ ekuivalen dengan $\beta_1(\mu + \gamma) > \beta_2(\beta_1 - \mu)$. Jadi, menurut [13] terbukti bahwa jika $R_0 < 1$ dan $\beta_1(\mu + \gamma) > \beta_2(\beta_1 - \mu)$, maka titik ekuilibrium E_1 dari Sistem (1) stabil asimtotik lokal.

(iii) Didefinisikan

$$R_1 = \frac{\beta_1\beta_2(\alpha + \mu + r)}{\alpha\gamma\sigma\beta_1 + \alpha\mu(\beta_1 + \beta_2) + \gamma\beta_1(r + \mu) + r\mu(\beta_1 + \beta_2) + \mu^2(\beta_1 + \beta_2)}$$

Titik ekuilibrium endemik E_2 dari Sistem (1) stabil asimtotik lokal jika $R_1 > 1$.

Bukti:

Matriks Jacobian di E_2 adalah:

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} -\mu - \beta_1 L_2 & -\beta_1 P_2 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 L_2 & \beta_1 P_2 - \mu - \beta_2 S_2 & -\beta_2 L_2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 S_2 & \beta_2 L_2 - (\mu + \gamma) & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \sigma)\gamma & -(\alpha + \mu + r) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma\gamma & \lambda & -\mu \end{bmatrix}$$

Dengan bantuan *software Maple*, diperoleh persamaan karakteristik dari $J(E_2)$ sebagai berikut:

$$(\lambda + \mu)(\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0) = 0$$

dengan

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \alpha\beta_1\beta_2^2S_2L_2^2 + \mu\beta_1\beta_2^2S_2L_2^2 + \mu\alpha\beta_2^2S_2L_2 + \mu^2\beta_2^2S_2L_2 > 0 \\
 a_1 &= \beta_1\beta_2^2S_2L_2^2 + \alpha\beta_1\beta_2L_2P_2 + \mu\beta_1\beta_2L_2P_2 + \alpha\beta_1\beta_2\frac{Q_{t2}}{S_2}L_2P_2 + \alpha\beta_2^2S_2L_2 + 2\mu\beta_2^2S_2L_2 > 0 \\
 a_2 &= \beta_1\beta_2L_2P_2 + \beta_2^2S_2L_2 + \alpha\beta_1L_2 + \mu\beta_1L_2 + \alpha\beta_1L_2\frac{Q_{t2}}{S_2} + \mu\alpha + \mu^2 + \mu\alpha\frac{Q_{t2}}{S_2} > 0 \\
 a_3 &= \alpha + 2\mu + \beta_1L_2\alpha\frac{Q_{t2}}{S_2} > 0
 \end{aligned}$$

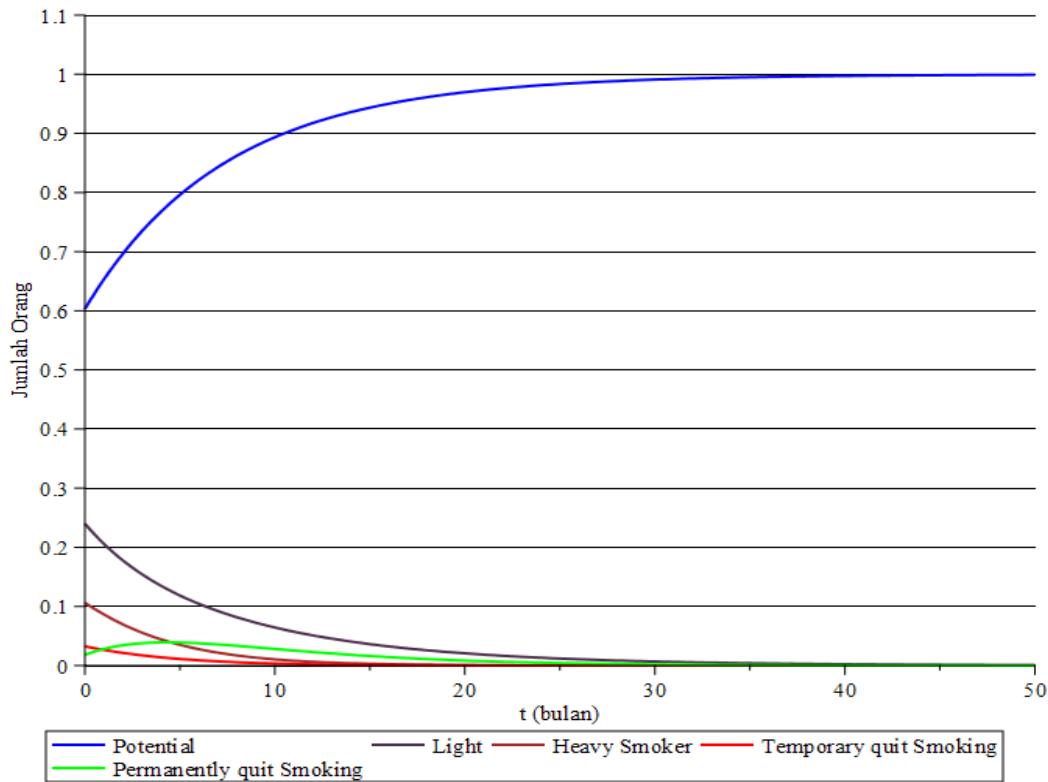
sehingga diperoleh $\lambda_1 = -\mu < 0$. Dengan menggunakan bantuan *software Maple* diperoleh $a_3a_2a_1 - (a_1^2 + a_3^2a_0) > 0$ sehingga berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, semua nilai eigen dari $\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ bernilai negatif. Akibatnya, menurut [13] titik ekuilibrium endemik E_2 stabil asimtotik lokal.

Berikut ini diberikan simulasi numerik dari Sistem (1) untuk mendukung hasil analisis kestabilan lokal titik ekuilibrium E_0, E_1 dan E_2 yang telah dibahas pada sub-bagian sebelumnya. Simulasi numerik dari Sistem (1) dikelompokkan berdasarkan eksistensi tiga titik ekuilibrium yang terkait dengan nilai R_0 dan R_1 .

Tabel 1 Nilai parameter untuk tiga kasus R_0 dan R_1

Parameter	Estimasi (per bulan)			Sumber
	$R_0 < 1$	$R_0 > 1$ dan $R_1 < 1$	$R_0 > 1$ dan $R_1 > 1$	
β_2	0,3	0,1	0,1	Alkhudari <i>et.al.</i> (2014)
γ	0,2	0,2	0,2	Alkhudari <i>et.al.</i> (2014)
α	0,25	0,25	0,25	Alkhudari <i>et.al.</i> (2014)
σ	0,4	0,4	0,4	Alkhudari <i>et.al.</i> (2014)
β_1	0,04	0,23	0,23	Alkhudari <i>et.al.</i> (2014)
μ	0,15	0,15	0,15	Alkhudari <i>et.al.</i> (2014)
r	0,2	0,2	0,2	Asumsi

Berdasarkan nilai-nilai parameter pada Tabel 1, diperoleh nilai $R_0 = 0,27$. Jika diberikan nilai awal Sistem (1), yaitu $P(0) = 0,60301$, $L(0) = 0,24000$, $S(0) = 0,10628$, $Q_t(0) = 0,03260$, $Q_p(0) = 0,01811$, maka dengan menggunakan *software Maple* grafik solusi Sistem (1) disajikan pada Gambar 2 berikut ini.

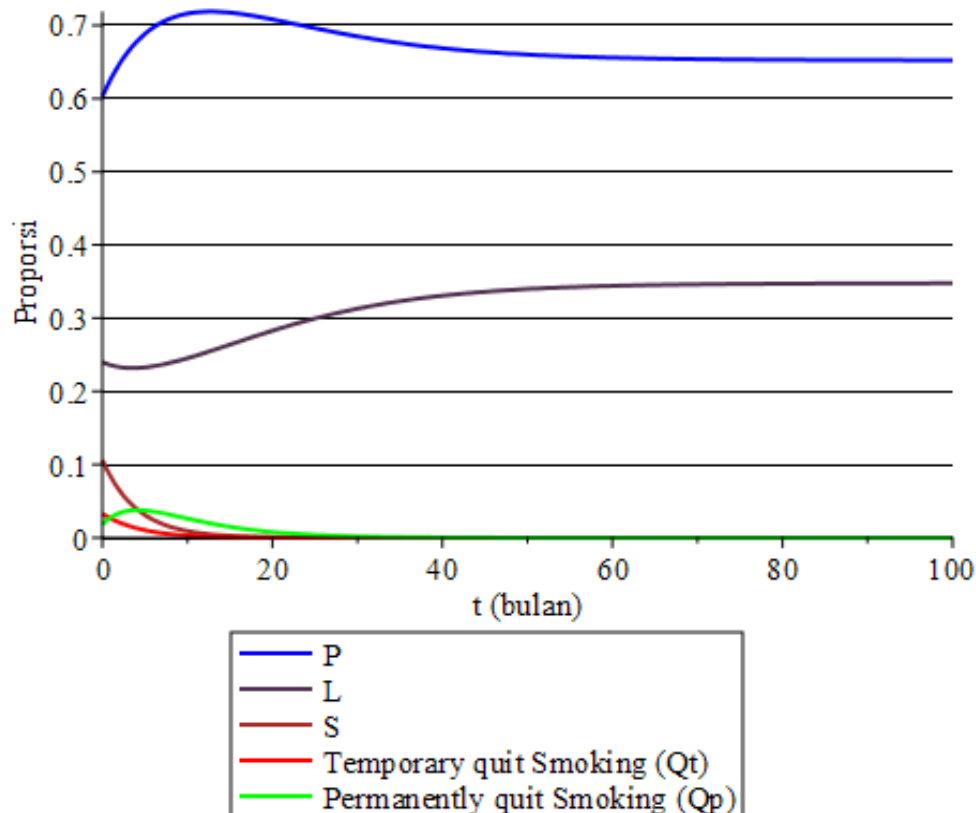


Gambar 2 Grafik perubahan proporsi kelas P, L, S, Q_t dan Q_p terhadap waktu (t) untuk kasus $R_0 < 1$

Gambar 2 menunjukkan bahwa proporsi kelas P naik menuju angka 1 dari nilai awal yang diberikan, kemudian stabil sampai waktu tak hingga. Sedangkan proporsi kelas L, S, Q_t dan Q_p turun menuju nol dari nilai awal yang diberikan kemudian stabil sampai waktu tak hingga. Kasus ini berarti bahwa pada saat $R_0 < 1$ proporsi kelas P, L, S, Q_t dan Q_p menuju ke titik ekuilibrium bebas rokok $E_0(1,0,0,0,0)$. Hal ini menunjukkan bahwa titik ekuilibrium bebas rokok $E_0(1,0,0,0,0)$ stabil asimtotik lokal.

Berdasarkan nilai-nilai parameter pada Tabel 1, diperoleh nilai $R_0 = 1,53$ dan $R_1 = 0,27$. Jika diberikan nilai awal Sistem (1), yaitu $P(0) = 0,60301$, $L(0) = 0,24000$, $S(0) = 0,10628$, $Q_t(0) = 0,03260$, $Q_p(0) = 0,01811$, maka dengan menggunakan *software Maple* grafik solusi Sistem (1) disajikan pada Gambar 3.

Gambar 3 menunjukkan bahwa proporsi kelas P naik menuju angka 0,65 dari nilai awal yang diberikan, kemudian stabil sampai waktu tak hingga. Proporsi kelas L naik menuju angka 0,34 dari nilai awal yang diberikan, kemudian stabil sampai waktu tak hingga. Sedangkan proporsi kelas S, Q_t dan Q_p turun menuju nol dari nilai awal yang diberikan kemudian stabil sampai waktu tak hingga. Kasus ini berarti bahwa pada saat $R_0 > 1$ dan $R_1 < 1$, proporsi kelas P, L, S, Q_t dan Q_p menuju ke titik ekuilibrium perokok sedang $E_1(0,65; 0,34; 0,0,0)$. Hal ini menunjukkan bahwa titik ekuilibrium perokok sedang $E_1(0,65; 0,34; 0,0,0)$ stabil asimtotik lokal.

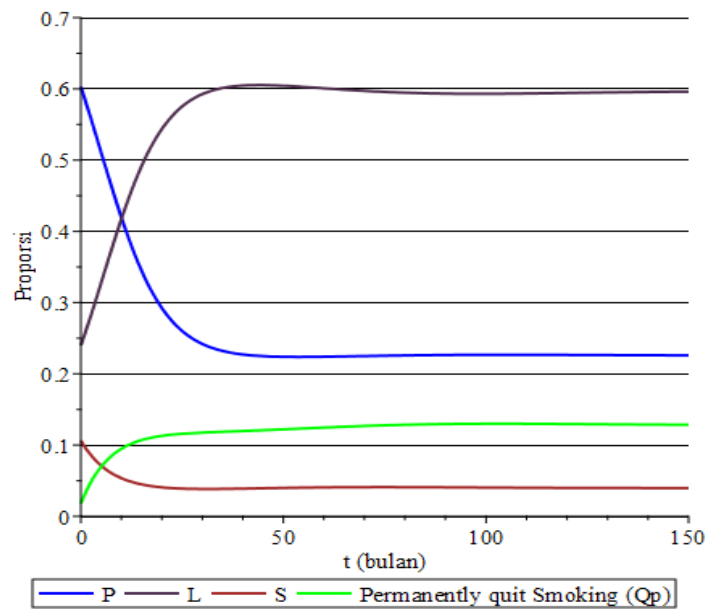


Gambar 3 Grafik perubahan proporsi kelas P, L, S, Q_t dan Q_p terhadap waktu (t) untuk kasus $R_0 > 1$ dan $R_1 < 1$

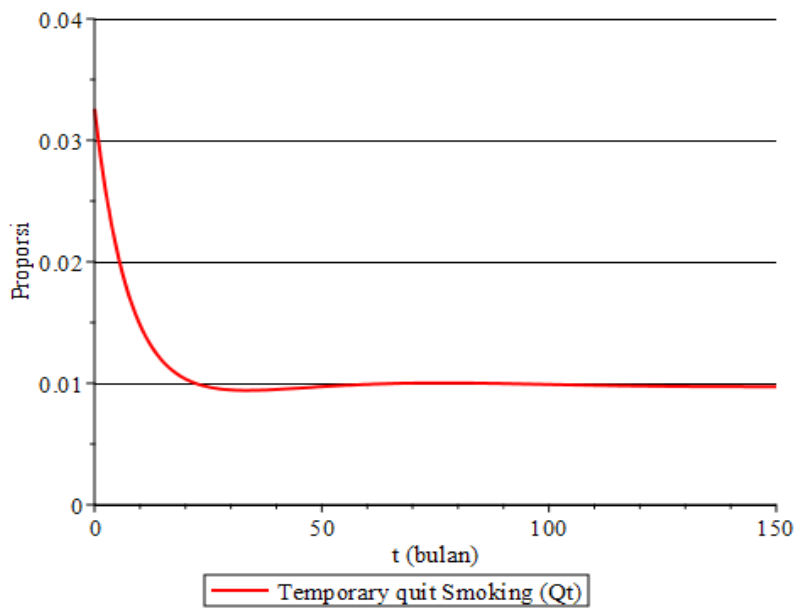
Berdasarkan nilai-nilai parameter pada Tabel 1, diperoleh nilai $R_0 = 5,75$ dan $R_1 = 1,29$. Jika diberikan nilai awal Sistem (1), yaitu $P(0) = 0,60301, L(0) = 0,24000, S(0) = 0,10628, Q_t(0) = 0,03260, Q_p(0) = 0,01811$, maka dengan menggunakan *software Maple* grafik solusi Sistem (1) disajikan pada Gambar 4.

Gambar 4 menunjukkan bahwa proporsi kelas P turun menuju angka 0,22 dari nilai awal yang diberikan, kemudian stabil sampai waktu tak hingga. Proporsi kelas L naik menuju angka 0,59 dari nilai awal yang diberikan kemudian stabil sampai waktu tak hingga. Proporsi kelas S turun menuju angka 0,039 dari nilai awal yang diberikan kemudian stabil sampai waktu tak hingga. Proporsi Q_p naik menuju angka 0,12 dari nilai awal yang diberikan kemudian stabil sampai waktu tak hingga.

Gambar 5 menunjukkan bahwa proporsi kelas Q_t turun menuju angka 0,009 dari nilai awal yang diberikan, kemudian stabil sampai waktu tak hingga. Berdasarkan Gambar 4 dan 5, untuk kasus ini berarti bahwa pada saat $R_0 > 1$ dan $R_1 > 1$ proporsi kelas P, L, S, Q_t dan Q_p menuju ke titik ekuilibrium perokok berat $E_2(0,22; 0,59; 0,039; 0,009; 0,12)$. Hal ini menunjukkan bahwa titik ekuilibrium perokok berat $E_2(0,22; 0,59; 0,039; 0,009; 0,12)$ stabil asimtotik lokal.



Gambar 4 Grafik perubahan proporsi kelas P, L, S dan Q_p terhadap waktu (t) untuk kasus $R_0 > 1$ dan $R_1 > 1$



Gambar 5 Grafik perubahan proporsi kelas Q_t terhadap waktu (t) untuk kasus $R_0 > 1$ dan $R_1 > 1$

Kesimpulan

Artikel ini membahas modifikasi model yang dikemukakan oleh Alkhudari,dkk. Modifikasi yang dilakukan berupa penambahan asumsi bahwa seorang perokok yang berhenti sementara dapat berhenti secara permanen dengan pemberian terapi secara psikis. Oleh karena itu, modifikasi dilakukan dengan menambahkan parameter r yang menyatakan rata-rata proporsi perokok yang berhenti sementara menjadi berhenti secara permanen. Model yang dibentuk berupa sistem persamaan diaferensial biasa non-linear, yaitu Sistem (1). Kemudian ditentukan titik ekuilibrium dari Sistem (1). Titik ekuilibrium dari Sistem (1) yang diperoleh yaitu titik ekuilibrium bebas rokok $E_0(1,0,0,0,0)$, titik ekuilibrium perokok sedang $E_1\left(\frac{\mu}{\beta_1}, \frac{\beta_1 - \mu}{\beta_1}, 0, 0, 0\right)$ dan titik ekuilibrium perokok berat $E_2(P_2, L_2, S_2, Q_{t2}, Q_{p2})$. Eksistensi tiga titik ekuilibrium tersebut terkait dengan *the Smoking Generation Number* R_0 dan *the Heavy Smoking Generation Number* R_1 . Kestabilan lokal tiga titik ekuilibrium tersebut juga terkait dengan nilai R_0 dan R_1 . Jika $R_0 < 1$, maka titik ekuilibrium bebas rokok E_0 dari Sistem (1) stabil asimtotik lokal. Titik ekuilibrium E_1 dari Sistem (1) stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$ dan $\beta_1(\mu + \gamma) > \beta_2(\beta_1 - \mu)$. Titik ekuilibrium endemik E_2 dari Sistem (1) stabil asimtotik lokal jika $R_1 > 1$. Selanjutnya, diberikan simulasi numerik untuk kasus $R_0 < 1$, $R_0 > 1$ dan $R_1 > 1$ untuk mendukung hasil analisis kestabilan lokal tiga titik ekuilibrium yang telah diperoleh tersebut.

Referensi

- [1] Tim Penulis (Poltekkes Depkes), *Kesehatan remaja: problem dan solusinya*, 1st ed. Jakarta: Salemba Medika, 2012.
- [2] TIM Penulis (TCSC-IAKMI), *Bunga Rampai - Fakta Tembakau dan Permasalahannya di Indonesia*, V. Jakarta: Tobacco Control and Support Center - IAKMI, 2014.
- [3] C.Castillo-Garsow, G.Jordan-Salivia, and A. R. Herrera, "Mathematical models for the dynamics of tobacco use, recovery, and relapse," Ithaca, NY, USA, 1997.
- [4] A. Lahrouz, L. Omari, D. Kiouach, and A. Belmaâti, "Deterministic and stochastic stability of a mathematical model of smoking," *Stat. Probab. Lett.*, 2011.
- [5] O. Sharomi and A. B. Gumel, "Curtailling smoking dynamics: A mathematical modeling approach," *Appl. Math. Comput.*, 2008.
- [6] G. Zaman, "Optimal campaign in the smoking dynamics," *Comput. Math. Methods Med.*, 2011.
- [7] G. Zaman, "Qualitative behavior of giving up smoking models," *Bull. Malaysian Math. Sci. Soc.*, 2011.
- [8] V. S. Ertürk, G. Zaman, and S. Momani, "A numeric-analytic method for approximating a giving up smoking model containing fractional derivatives," *Comput. Math. with Appl.*, 2012.
- [9] A. Zeb, G. Zaman, and S. Momani, "Square-root dynamics of a giving up smoking model," *Appl. Math. Model.*, 2013.
- [10] G. A. K. Van Voorn and B. W. Kooi, "Smoking epidemic eradication in a eco-epidemiological dynamical model," *Ecol. Complex.*, 2013.
- [11] Z. Alkhudhari, S. Al-Sheikh, and S. Al-Tuwairqi, "Global Dynamics of a Mathematical Model on Smoking," *ISRN Appl. Math.*, 2014.
- [12] Z. Alkhudari, S. Al-Sheikh, and S. Al-Tuwairqi, "The effect of occasional smokers on the dynamics of a smoking model," *Int. Math. Forum*, 2014.

- [13] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, 3th ed. New York: Springer, 2001.
- [14] P. Van Den Driessche and J. Watmough, "Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission," *Math. Biosci.*, 2002.