

Analisis dan Simulasi Model Matematika untuk Kehidupan Sosial dan Dominasi dalam Koloni Semut *Leptothorax Acervorum*

Irma Aryani^{1, a)}, Rahmi^{1, b)}

¹Prodi Pendidikan Matematika, FKIP Universitas Abulyatama

^{a)}email: irmaaryani_pmtk@abulyatama.ac.id

^{b)}email: rahmi_matematika@abulyatama.ac.id

Abstrak

Semut *Leptothorax acervorum* memiliki karakteristik kehidupan sosial, diantaranya pembagian peran, keharmonisan, dan kompetisi betina-betina dalam perebutan hak reproduksi di koloninya. Kompetisi yang mematikan ini terjadi baik sesama gyne maupun gyne dengan pekerja. Berdasarkan fenomena yang terjadi pada koloni semut *Leptothorax acervorum* akan dibangun model matematika. Model ini dibentuk dengan membagi populasi semut menjadi tiga kompartemen, yaitu gyne, pekerja, dan jantan pada populasi *Leptothorax acervorum*. Fenomena yang menarik seperti kompetisi-kompetisi yang terjadi pada semut *Leptothorax acervorum* dianalisis dan kestabilan koeksistensi juga akan ditunjukkan secara analitik. Selanjutnya, untuk melihat pengaruh kompetisi terhadap koeksistensi dalam koloni akan ditunjukkan dengan simulasi numerik.

Kata kunci: *Leptothorax acervorum*, kompetisi, model matematika, kestabilan Koeksistensi

Abstract

Leptothorax acervorum have the characteristics of social life, such as the division of roles, harmonious, and female-female competition in the struggling to reproduce in colony. This deadly competition takes place between fellow gyne and gyne with workers. Based on the phenomena that occur in the ant colony of *Leptothorax acervorum* a mathematical model will be built. This model is formed by dividing the ant population into three compartments, i.e gyne, worker, and male in the *Leptothorax acervorum* population. Interesting phenomena such as the competition that occurs in the *Leptothorax acervorum* ant is analyzed and the stability of coexistence will also be shown analytically. Numerical simulations and sensitivity analysis show that a certain level of competition is even necessary to maintain a certain level of coexistence in the colonies.

Keywords: *Leptothorax acervorum*, competition, mathematical model, stable coexistence

Pendahuluan

Leptothorax acervorum merupakan semut merah kecil yang berasal dari subfamily *Mymicinae* yang hidup di bawah kulit batang atau cabang pohon yang membusuk [1]. Semut *Leptothorax acervorum* memiliki bagian kepala dan abdomen berwarna gelap, serta ukuran tubuh yang kecil dengan ukuran tubuh pekerja ~ 3 mm dan ukuran ratu 10% lebih besar dari ukuran pekerja [2][3]. Semut ini juga memiliki ukuran koloni yang kecil dengan jumlah pekerja 12-157 ekor, 4-16 gyne, dan satu sampai beberapa ratu perkoloni [4]. Bernadou, J., et.al menyebutkan ukuran koloni bervariasi antara 12-282 semut pekerja[1]. Dari riset Heinze J mengemukakan bahwa 52 koloni dengan 15 koloni monogini, menghasilkan 287 betina dan 298 jantan[5].

Struktur koloni semut ini terdiri dari ratu, gyne, pekerja dan semut jantan. Betina yang mendapatkan hak reproduksi, dinamakan "ratu", dan betina yang belum ditentukan status reproduksi, dinamakan "gyne". Gyne diadopsi oleh ratu tua (induknya)[5]. Ratu yang memiliki hak reproduksi dalam koloni, sedangkan pekerja tidak dapat bereproduksi bahkan pekerja yang betina tidak memiliki ovarium pada jenis semut tertentu. Semut pekerja melayani ratu serta memastikan ratu dan telurnya selamat meskipun harus mati. Semut pekerja juga bergotong royong mencari makanan untuk pertumbuhan koloni dan mempertahankan sarangnya. Pembagian tugas ini merupakan karakteristik yang sangat penting pada jenis serangga sosial dan sukses dalam berevolusi [6][7][8]. Selain pembagian tugas dalam koloni semut, kompetisi yang terjadi dalam sarang juga memiliki peran penting dalam keberlangsungan koloni semut.

Pada semut *Leptothorax acervorum*, kompetisi terjadi antara betina-betina. Kompetisi betina-betina menentukan ratu yang berhak bereproduksi [6]. Kompetisi ini dapat menyebabkan kematian dan pengusiran calon ratu atau gyne dari sarangnya. Dengan demikian, semakin meningkat penyerangan pekerja terhadap gyne, maka kemungkinan populasi gyne menurun. Ketika populasi gyne tidak eksis, maka tidak ada ratu yang bereproduksi dalam koloni. Jadi, populasi gyne menentukan keberlangsungan hidup ekosistem semut ini [6][8].

Semut *L. acervorum* yang tersebar di hutan konifer bagian utara dan central Eropa dan Siberia berupa kelompok pologini (yaitu, beberapa ratu yang dapat bereproduksi dalam sarangnya). Sedangkan koloni monogini (yaitu hanya satu ratu yang boleh bereproduksi) hanya tersebar dibagian Alaska , Hokkaido, dan pada batas selatan di pegunungan daerah di pusat Spanyol [4][6]

Dalam koloni poligini, beberapa ratu bereproduksi dan tidak menunjukkan permusuhan terang-terangan. Sedangkan pada fungsional monogini, menunjukkan adanya kompetisi dalam perebutan hak untuk reproduksi [4][6][9]. Kompetisi yang mematikan ini terjadi baik sesama gyne maupun gyne dengan pekerja. Perkelahian antar gyne biasanya terlibat dalam perilaku yang dominan, seperti tinju antena, menarik atau menggigit antena dan kaki. Sedangkan perilaku pekerja terhadap gyne berupa perilaku antagonis dan perilaku sociopositif. Perilaku antagonis, pekerja menyerang gyne dengan menggigit dan menarik pada kaki dan antena. Perilaku antagonis pekerja pada gyne tidak diketahui secara jelas hubungan dengan kesuksesan reproduksi gyne. Akan tetapi, penyerangan pekerja dapat menyebabkan pengusiran gyne dari sarang atau kematian. Sedangkan perilaku sociopositif pekerja berupa pengurusan dan pemberian makanan kepada gyne [6][10]. Ratu ditetapkan dari perilaku yang paling dominan dalam perebutan kekuasaan atau sedikit mendapat penyerangan. Pekerja dapat memperkuat kekuasaan ratu yang dominan dengan memberi makanan istimewa dan pengurusan kepada ratu [4][11].

Interaksi sosial dan kompetisi yang terjadi hebat pada semut *Leptothorax acervorum* merupakan fenomena menarik yang terjadi di alam. Kompetisi-kompetisi yang mematikan bahkan menyebabkan pengusiran dari koloni, dapat menentukan semut yang paling berkuasa dan yang mendominasi di dalam koloni[11]. Selain itu, tingkat kelahiran dan lifetime dari kedua jenis semut ini kecil, bahkan semut *Leptothorax acervorum* terancam punah.

Model Matematika

Dari fenomena yang terjadi di koloni semut *Leptothorax acervorum*, akan dibangun model matematika untuk interaksi sosial, dominasi dan persaingan di koloni semut dengan asumsi bahwa populasi tertutup, jumlah populasi ratu dalam koloni dianggap konstan (satu ratu bereproduksi), tingkat kelahiran populasi dari ratu bersifat konstan, penambahan populasi masing-masing kompartemen dikarenakan kelahiran dan perpindahan populasi, Pengurangan populasi masing-masing kompartemen disebabkan kematian natural, keluar dari koloni, pengaruh dari kompetisi antar anggota koloni, dan tidak ada kompetisi antara jantan dengan pekerja. Model akan dibangun dengan membagi populasi

menjadi tiga kompartemen, yaitu kompartemen gyne (x), pekerja (betina) (y), jantan (z), di mana x , y , dan z adalah suatu fungsi terhadap waktu t .

$$\frac{dx}{dt} = by - c_1xy - c_2x^2 - ex - n_1x,$$

$$\frac{dy}{dt} = aA - by - c_3xy - n_2y,$$

$$\frac{dz}{dt} = (1-a)A - n_3z,$$

(1)

di mana A kelahiran dari ratu per hari, a proporsi kelahiran y , b laju transisi y ke x , e laju keluar darikoloni, $c_{1,2,3}$ pengaruh kompetisi, $n_{1,2,3}$ laju kematian natural. Titik kesetimbangan dari sistem persamaan (1) adalah

$$\left\{ x > 0, y = \frac{aA}{b + c_3x + n_2}, z = \frac{(1-a)A}{n_3} \right\}$$

dimana x akar dari polinom kubik

$$c_2c_3x^3 + (c_3e + c_2b + c_2n_2 + c_3n_1)x^2 + (c_1aA + e(b + n_2) + n_1n_2 + n_1b)x - abA = 0.$$

Karena koefisien dari polinom bernilai positif, maka berdasarkan *Descartes' Criterion* diperoleh satu akar real positif[12]. Dengan demikian dapat disimpullkan bahwa titik kesetimbangan yang diperoleh eksis dan unik. Selanjutnya akan dianalisis kestabilan koeksistensi dengan menganalisis nilai eigen dari poligon karakteristik dari matriks jacobian dari model dinamika (1) di titik kesetimbangan, adalah

$$\begin{pmatrix} \lambda + \frac{c_1aA}{b + c_3x + n_2} + e + 2c_2x + n_1 & -b + c_1x & 0 \\ \frac{c_3aA}{b + c_3x + n_2} & \lambda + b + c_3x + n_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + n_3 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Dari determinan pada matriks jacobian diperoleh polinom karakteristik yang menggambarkan kestabilan titik kesetimbangan, yaitu

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b + c_3x + n_2} ((\lambda + n_3)((b + c_3x + n_2)\lambda^2 \\ & + (b^2 + 2bc_3x + 2bn_2 + c_3^2x^2 + 2c_3n_2x + n_2^2 + c_1aA + e(b + c_2x + n_2) \\ & + 2c_2(bx + 2c_3x^2 + 2n_2x) + n_1(b + c_3x + n_2))\lambda \\ & + abAc_3 + b^2(e + n_1) + n_1n_2^2 + en_2^2 + 2ben_2 + 2c_2b^2x + 2n_1n_2b + 2c_3^2c_2x^3 \\ & + c_3^2ex^2 + c_3^2n_1x^2 + 2c_2n_2^2x + n_2c_1aA + 2c_3n_1n_2x + 4c_3c_2n_2x^2 + 2c_3bn_2x \\ & + 2bn_1c_3x + 4bc_2(n_2x + c_3x^2) + 2bec_3x + bc_1aA). \end{aligned} \tag{3}$$

Misalkan

$$a = (b + c_3x + n_2) > 0,$$

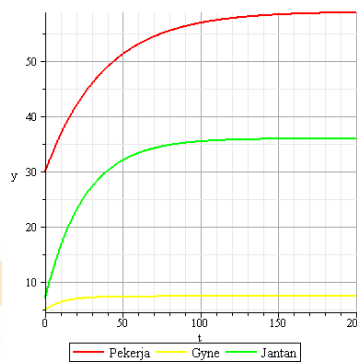
$$b = (b^2 + 2bc_3x + 2bn_2 + c_3^2x^2 + 2c_3n_2x + n_2^2 + c_1aA + e(b + c_2x + n_2) + 2c_2(bx + 2c_3x^2 + 2n_2x) + n_1(b + c_3x + n_2)) > 0,$$

$$c = abAc_3 + b^2(e + n_1) + n_1n_2^2 + en_2^2 + 2ben_2 + 2c_2b^2x + 2n_1n_2b + 2c_3^2c_2x^3 + c_3^2ex^2 + c_3^2n_1x^2 + 2c_2n_2^2x + n_2c_1aA + 2c_3n_1n_2x + 4c_3c_2n_2x^2 + 2c_3bn_2x + 2bn_1c_3x + 4bc_2(n_2x + c_3x^2) + 2bec_3x + bc_1aA > 0.$$

Dari persamaan (3) diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -\eta_3$. Selanjutnya dapat dilihat bahwa nilai koefisiennya bernilai positif, $a > 0$, $b > 0$, dan $c > 0$, serta penjumlahan kedua akarnya $-\frac{b}{a} < 0$ dan perkalian kedua akarnya $\frac{c}{a} > 0$. Maka haruslah nilai eigen λ_2 dan λ_3 bagian realnya negatif. Titik kesetimbangan dikatakan stabil, jika semua nilai eigen bagian real bernilai negative [13]. Karena semua nilai eigen dari matriks jacobian (2) bagian real negatif, maka titik kesetimbangan dari persamaan (1) stabil koeksistensi.

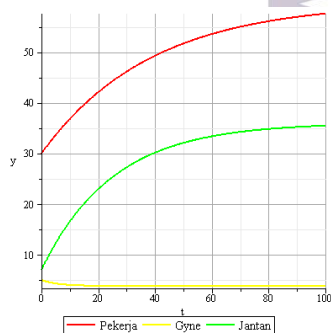
Simulasi Numerik

Dari model yang telah dibangun, akan dilihat kesesuaian dengan kondisi real koloni semut *Leptothorax acervorum* dengan simulasi numerik dan akan diinterpretasikan. Berdasarkan simulasi pertama yang ditunjukkan pada Gambar 1, populasi semut pekerja dan gyne naik secara monoton dan akan menuju ke populasi yang stabil, yaitu 59 ekor dan 7 ekor.

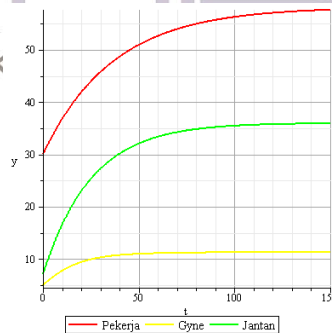


Gambar 1. Simulasi Pertama

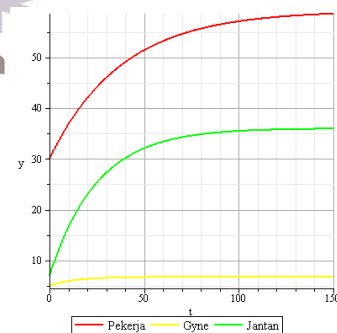
Selanjutnya akan dilihat pengaruh kompetisi terhadap populasi semut *Leptothorax acervorum* dengan meningkatkan dan menurunkan nilai parameter kompetisi, yaitu c_1, c_2 , dan c_3 .



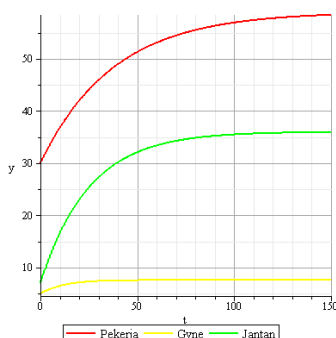
Gambar 2. c_1 ditingkatkan



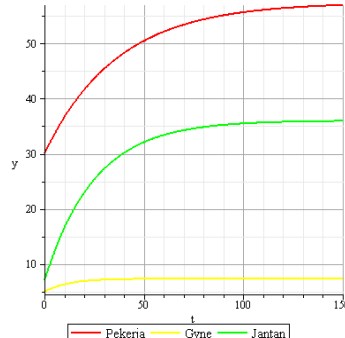
Gambar 3. c_1 diturunkan



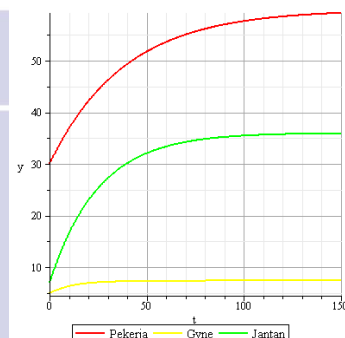
Gambar 4. c_2 ditingkatkan



Gambar 5. c_2 diturunkan



Gambar 6. c_3 ditingkatkan

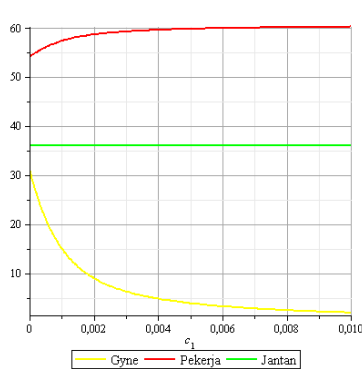


Gambar 7. c_3 diturunkan

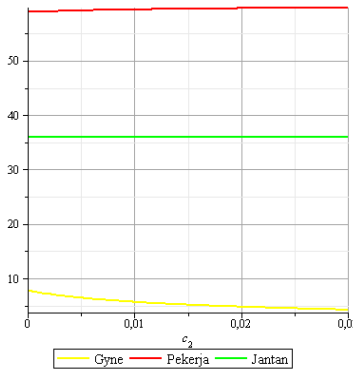
Dari Gambar 1., Gambar 2., Gambar 3., Gambar 4., dan Gambar 5. dapat dilihat bahwa nilai parameter c_1 lebih mempengaruhi pertumbuhan populasi gyne dibandingkan nilai parameter c_2 . Fenomena ini menunjukkan bahwa serangan pekerja terhadap gyne memberikan pengaruh yang besar terhadap kekuasaan dalam koloni atau penentuan ratu. Dan hal ini juga sesuai dengan hasil riset Trettin J, menemukan bahwa penyerangan pekerja terhadap gyne yang menyebabkan kematian banyak gyne [6]. Sedangkan nilai c_3 (Gambar 6. Dan Gambar 7.) tidak memiliki berpengaruh signifikan terhadap populasi pekerja dan gyne. Hal ini sesuai hasil temuan menunjukkan bahwa kompetisi pekerja dan gyne pada semut *Leptothorax acervorum* lebih dominan perilaku penyerangan pekerja pada gyne yang menyebabkan kematian gyne [4][6]. Pertumbuhan populasi semut jantan, dari semua hasil simulasi menunjukkan bahwa jumlah populasi jantan naik secara monoton dan akan menuju populasi kesetimbangan, yaitu 36 ekor.

Selanjutnya akan dianalisis perubahan parameter pengaruh kompetisi antar anggota koloni semut *Leptothorax acervorum* terhadap perubahan titik kesetimbangan pada waktu tertentu.

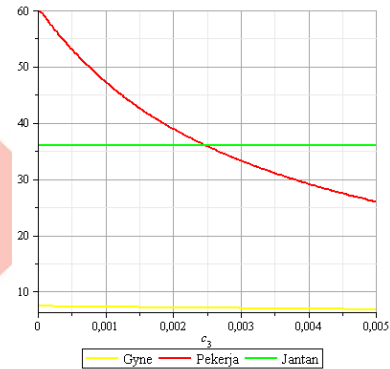
Analisis sensitivitas pertama dilakukan perubahan nilai parameter c_1 , c_2 , dan c_3 yang kemudian akan dilihat pengaruh terhadap populasi kesetimbangan. Hasil numeriknya ditunjukkan pada Gambar 8., Gambar 9., dan Gambar 10.



Gambar 8. Perubahan nilai c_1



Gambar 9. Perubahan nilai c_2



Gambar 10. Perubahan nilai c_3

Dari gambar dapat dilihat bahwa nilai parameter pengaruh kompetisi antara pekerja dan gyne terhadap gyne (c_1) dibandingkan dengan nilai parameter pengaruh kompetisi lainnya, memberikan pengaruh signifikan terhadap populasi gyne. Hal ini menunjukkan bahwa pekerja berperan penting dalam penentuan gyne yang akan menjadi ratu. Keagresifan pekerja menyebabkan kematian gyne, sehingga ketika nilai c_1 meningkat, populasi gyne menurun secara monoton. Begitu juga dengan perubahan nilai c_2 , semakin meningkat kompetisi antar gyne maka populasi kesetimbangan gyne semakin menurun. Untuk nilai c_3 , memberikan pengaruh yang signifikan terhadap populasi pekerja daripada populasi gyne. Ketika nilai c_3 naik, populasi pekerja menurun secara monoton.

Kesimpulan

Kompetisi antara gyne dan pekerja atau keagresifan pekerja kepada gyne, memberikan pengaruh yang signifikan terhadap populasi gyne. Selain itu, keagresifan pekerja memberikan pengaruh yang signifikan terhadap perubahan nilai parameter laju keluar koloni. Hal ini dikarenakan keagresifan pekerja yang menyebabkan kematian bagi gyne dan keluar dari sarangnya. Kompetisi antara gyne dan pekerja terhadap pekerja, memberikan pengaruh signifikan terhadap populasi pekerja dibandingkan efek kompetisi lainnya.

Ucapan Terima Kasih

Penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada Direktorat Riset dan Pengabdian Masyarakat (DRPM) dan Lembaga dan Layanan Pendidikan Tinggi (L2Dikti) yang telah membantu dan mendukung penelitian ini. Selain itu, penulis juga ingin mengucapkan terima kasih kepada Rektor Universitas Abulyatama R. Agung Efriyo Hadi, Ph.D dan Lembaga Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat (LPPM) Universitas Abulyatama Aceh.

Referensi

- [1] Bernadou, A., et. al. (2016). *Body Size but not Colony Size Increases with Altitude in the Holarctic Ant, Leptothorax Acervorum*. Ecological Entomology, 41, 733-736. DOI: 10.1111/een.12338.
- [2] Heinze, J., et. al. (2003). "The Significance of Latitudinal Variation in Body Size in a Holarctic Ant, *Leptothorax Acervorum*", Ecography, 26: 349-335. Doi:10.1034/j.1600-0587.2003.03478.
- [3] Ito, F. (2005). *Mechanism Regulating Functional Monogyny in Japanese Population of Leptothorax Acervorum (Hymenoptera, Formicidae, Myrmicinae): Dominance hierarchy and Prefential Egg Cannibalism*. Belg j Zool, 135:3-8
- [4] Heinze, J, and Ortius, D. (1991). *Social Organization of Leptothorax Acervorum from Alaska (Hymenoptera: Formicidae)*. Psyche 1991,98:227-240.
- [5] Heinze, J., et.al. (2001). *Sex Ratio in The Facultatif Polygynous Ant, Leptothorax Acervorum*. Behavioral Ecology and Sociobiology, springer, 50 : 270-274.
- [6] Trettin, J., et.al. (2011). *Queen dominance and worker policing control reproduction in a threatened ant*, BMC Ecology 2011, 11:21.
- [7] Kühbandner, S., et. al. (2014). *Age and Ovaria Development are Related to Worker Personality and Task Allocation in the Ant Leptothorax acervorum*. Current Zoology: 60 (3): 392–400.
- [8] Friend, LA., and Bourke, AFG. (2014). *Workers Respond to Unequal Likelihood of Future Reproductive Opportunities in An Ant*. Animal Behaviour. Vol 97: 165-176.
- [9] Trettin, J., (2015). *Proximate and Ultimate Factors Influencing Rreproductive Skew in the Ant Species Leptothorax acervorum (Hymenoptera: Formicidae)*. Disertasi untuk tingkat doctoral dari ilmu alami (dr. Rer. Nat.) Fakultas biologi dan obat preclinik .universitas Regensburg.
- [10] Gill, R., and Hammond, R. (2011). *Workers Influence Royal Reproduction*. Proc R Soc Lond B 2011 278, doi: 10. 1098/rspb.2010.1774.
- [11] Trettin, J., et.al. (2014). *Behavioral Plasticity in Ant Queens: Environmental Manipulation Induces Aggression among Normally Peaceful Queens in the Socially Polymorphic Ant Leptothorax acervorum*. PLoS ONE 9(4): e95153.
- [12] <http://mathworld.wolfram.com/DescartesSignRule.html> diakses 4 Mei 2018
- [13] Hirsch M and Smale S. 1974. Differential Equations, Dynamical System, and Linear Algebra. London: Academic Press, INC.